

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Lenka Zboňáková

Kvantitativní metody ve financích

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2012

Na tomto mieste by som rada poďakovala vedúcemu mojej bakalárskej práce, doc. RNDr. Janu Hurtovi, CSc., za cenné rady a pripomienky a za čas, ktorý mi pri jej písaní venoval. Vďaka patrí aj mojim rodičom, ktorí ma podporovali počas celého doterajšieho štúdia.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 1. 8. 2012

Lenka Zboňáková

Názov práce: Kvantitatívny metody ve financích
Autor: Lenka Zboňáková
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedúci bakalárskej práce: doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.
E-mail vedúceho: hurt@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V predloženej práci sa venujeme kvantitatívnym rizikovým mieram odhadujúcim vplyv trhového rizika na investície vložené do finančných inštrumentov. Najčastejšie používanou mierou je hodnota v riziku (Value at Risk), ktorú predstavujeme s jej vlastnosťami a modifikáciami. Pri aplikácii vybraných metód na reálne dáta sa stretávame s problémom aproximácie ich rozdelenia, špeciálne vo viacrozmerných prípadoch, kedy rizikové faktory podliehajú vzájomnej závislosti. To nás vedie k skúmaniu kopula funkcií, ktoré v práci používame na zahrnutie štruktúr závislosti jednotlivých rizikových faktorov do výčíslenia hodnôt mier rizika. Vybrané metódy aproximácie a výpočtu rizikových mier sú aplikované na reálne dáta a uvedené spolu s výsledkami, prípadnými grafickými znázorneniami a vzájomným porovnaním.

Kľúčové slová: rizikový faktor, miera rizika, Value at Risk, Conditional Value at Risk, kopula funkcia

Title: Quantitative methods in finance
Author: Lenka Zboňáková
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.
Supervisor's e-mail address: hurt@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present thesis we deal with the quantitative risk measures estimating the influence of market risk on the investments to the financial instruments. The most commonly used measure is Value at Risk which we introduce with its characteristics and modifications. Applying the methods to real data we deal with the problem of approximation of its distribution, especially in the multidimensional cases when the risk factors are dependent on each other. This leads us to explore copula functions that are in the thesis used to include the dependence structures of the risk factors to calculation of the risk measures. Chosen methods of approximation and evaluation of the risk measures are applied to real data and stated with outputs and their comparison.

Keywords: risk factor, risk measure, Value at Risk, Conditional Value at Risk, copula function

Obsah

Úvod	2
1 Miery rizika vo financiách	3
1.1 Koherentná miera rizika	4
1.2 Štandardná odchýlka	5
1.3 Hodnota v riziku (VaR)	5
1.4 Podmienená hodnota v riziku (CVaR)	6
1.5 Ďalšie modifikácie hodnoty v riziku	7
1.6 Spektrálne miery rizika	9
2 Odhady mier rizika	11
2.1 Neparametrické odhady	11
2.2 Parametrické odhady	16
3 Kopuly a miery rizika	26
3.1 Miery závislosti	26
3.2 Definícia kopúl a ich vlastnosti	28
3.3 Triedy kopúl	30
3.3.1 Eliptická trieda	31
3.3.2 Archimedovská trieda	34
3.4 Aplikácia kopúl na reálne dáta	36
Záver	39
Literatúra	40

Úvod

V súčasnosti sa veľká časť sveta riadi finančnými trhmi, ktoré vo veľkej miere určujú situáciu celosvetovej ekonomiky. Z toho hľadiska je dôležité ovládať a riadiť možné riziká vznikajúce ich vplyvmi, a teda ovplyvňujúce cenu a výnosy finančných inštrumentov, ktoré sa tak stávajú v budúcnosti neistými, čiže ich považujeme za náhodné veličiny.

V práci sa zaoberáme konkrétne trhovým rizikom patriacim medzi finančné riziká a pozostávajúcim hlavne z úrokového, menového, komoditného a akciového rizika. Hlavným cieľom je popísať kvantitatívne metódy používané na jeho vyjadrenie a následne ich aplikovať na reálne dáta.

V prvej kapitole sa venujeme najznámejším rizikovým mieram a ich rozšíreniam, ktoré patria medzi hlavné prostriedky určovania veľkosti možných strát spojených s obchodovaním na finančných trhoch a pri stanovovaní kapitálových požiadaviek v bankovom sektore. Miery sa nezaoberajú len výškou strát, ale aj pravdepodobnosťou ich nastania, čo je v praxi kľúčovým ukazovateľom. Vďaka spomenutým vlastnostiam patria miery rizika medzi svetovo uznávané merítka a riadi sa nimi celý finančný svet.

Druhá kapitola je vyhradená na aplikáciu rizikových mier v praxi, a to na konkrétne dáta získané pomocou softvéru *Mathematica*. Bližšie rozoberáme jednotlivé prístupy k odhadu funkcií, pomocou ktorých sa následne určujú hodnoty finančných nástrojov v riziku. Okrem jednorozmerných prípadov, kedy cenu finančného inštrumentu ovplyvňuje jeden rizikový faktor sa zaoberáme aj dvojrozmernou variančno-kovariančnou metódou, ktorá umožňuje rôzne kombinácie štyroch základných typov trhového rizika.

Posledná kapitola je venovaná sofistikovanejšej metóde odhadu miery expozície voči trhovému riziku, kedy je výnos z investície do nástroja finančného trhu ovplyvňovaný viacerými rizikovými faktormi. Jedná sa o kopula funkcie, ktoré sa používajú za účelom presnejšieho vyjadrenia miery závislosti jednotlivých faktorov určujúcich vývoj cien na trhu. V kapitole uvádzame stručný popis mier závislosti a ich využitie v teórii kopula funkcií. Taktiež ilustrujeme využitie konkrétnych kopula funkcií v praxi pomocou ich aplikácie na reálne dáta.

Výpočty uvedené a používané v práci sú uskutočňované za pomoci softvéru *Mathematica*.

Kapitola 1

Miery rizika vo financiách

Pri meraní trhového rizika a odhadovaní jeho vplyvu na hodnotu finančných inštrumentov sa používajú ceny aktív v závislosti na čase. Vhodným ukazovateľom trhových podmienok v priebehu času je miera výnosnosti. Definujeme ju ako

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}},$$

kde P_t je cena aktíva v čase $t = 0, 1, 2, \dots$ a R_t miera výnosnosti z času $t - 1$ do času t . Ceny finančných umiestnení sú náhodné veličiny závislé na trhových podmienkach a ich vývoji v priebehu času, a preto je ňou aj miera výnosnosti.

Náhodnú veličinu vyjadrujúcu zisk teda značíme R . Pre potreby aplikácie kvantitatívnych metód na vyjadrenie rizika, ktorému investori čelia, však potrebujeme poznať rozdelenie straty, ktorú definujeme ako

$$L = -R.$$

Miery rizika sú často aplikované práve na relatívnu zmenu strát, no v niektorých prípadoch by nás mohla zaujímať absolútna strata. Za časové obdobie $[t - 1, t]$ ju vypočítame ako

$$D_t = P_{t-1} - P_t = L_t \cdot P_{t-1}.$$

Ďalej budeme predpokladať, že distribučné funkcie náhodných veličín zisku a straty, R a L , prípadne D , sú absolútne spojité. Pri ich aproximácii je tiež nutné rozhodnúť, či pôjde o podmienené alebo nepodmienené rozdelenie, čo sú v manažmente rizika bežné postupy.

V nepodmienenom rozdelení predpokladáme, že distribučná funkcia náhodnej veličiny L nezávisí na časovom období, v ktorom ju uvažujeme. V priebehu času sa teda rozdelenie straty L nemení. Pre potreby vyjadrenia rozdelenia, ktoré je z hľadiska závislosti na čase dynamické, podmienime distribučnú funkciu faktorom, ktorý zmeny indikuje. Širšie je o rozdiel medzi podmieneným a nepodmieneným rozdelením pojednané v literatúre [5].

1.1 Koherentná miera rizika

Za účelom vyjadrenia rizikovosti finančných inštrumentov a ohodnotenia výnosnosti investícií aplikujeme na vyššie zavedené náhodné veličiny R a L rizikové miery. Z pohľadu finančných trhov sú to silné nástroje, a preto je nutné, aby spĺňali isté požiadavky a udávali tak relevantné informácie pre investorov.

Základnou z požadovaných vlastností je **koherentnosť**, ktorú by malo mať každé aplikované merítko expozície voči trhovému riziku. Koherentnú mieru definujeme nasledovne:

Definícia 1.1: *Koherentnou mierou rizika nazývame reálnu funkciu r na priestore náhodných veličín \mathcal{P} , ktorá má pre dané $L_1, L_2 \in \mathcal{P}$, $a \in \mathbb{R}$ tieto vlastnosti:*

$$(i) \quad L_1 \leq L_2 \text{ skoro isto} \Rightarrow r(L_1) \leq r(L_2) - \text{monotónnosť}, \quad (1.1)$$

$$(ii) \quad r(L_1 + L_2) \leq r(L_1) + r(L_2) - \text{subaditivita}, \quad (1.2)$$

$$(iii) \quad r(aL_1) = ar(L_1), \quad a > 0 - \text{pozitívna homogenita}, \quad (1.3)$$

$$(iv) \quad r(a + L_1) = a + r(L_1) - \text{invariancia voči posunutiu}. \quad (1.4)$$

Každá zo zadaných vlastností má svoj ekonomický význam, vďaka čomu sa miera, ktorá nimi disponuje, pokladá za vhodnú na odhadovanie trhového rizika.

Význam monotónnosti je zrejmý - s väčšími hodnotami náhodnej veličiny definujúcej stratu sa zvyšuje aj veľkosť straty na určitej hladine spoľahlivosti.

V prípade neexistencie subaditivity by pre nejaké L_1 a L_2 platila nerovnosť

$$r(L_1 + L_2) > r(L_1) + r(L_2).$$

Znamenalo by to, že celkové riziko dvoch investorov investujúcich do aktív A a B by bolo menšie ako riziko, ktorému je vystavený investor umiestňujúci svoje financie do aktív A a B zároveň. To je však v rozpore s bežnou situáciou na finančných trhoch, kedy investičné spoločnosti znižujú riziko vkladáním svojho peňažného majetku do viacerých finančných zdrojov.

Pozitívna homogenita vyplýva z použitia charakteristík (1.1) a (1.2). Riziková miera, pre ktorú neplatí, by, podobne ako v prípade predchádzajúcej vlastnosti, naznačovala, že investícia s možnými stratami definovanými náhodnou veličinou aL_1 je rizikovejšia ako a investícií do aktíva so stratami L_1 . Zo subaditivity a pozitívnej homogenity zároveň vyplýva, že koherentná miera r je konvexná na množine \mathcal{P} náhodných veličín, viď literatúru [5].

Poslednou vlastnosťou je invariancia voči posunutiu. Vyjadruje skutočnosť, že riziko portfólia pozostávajúceho z aktíva s pevným výnosom a z aktíva s výnosom závislým na veľkosti strát L_1 je ovplyvnené len náhodnou veličinou L_1 , čo je

na finančných trhoch bežným javom.

Z uvedeného by sme mohli predpokladať, že každá riziková miera spĺňa podmienku koherentnosti, pretože, ako sme ukázali, v investičnej praxi jej charakteristiky platia. Opak je pravdou, a dokonca jedna z najpoužívanějších metód merania rizika, Value at Risk, koherentná nie je.

1.2 Štandardná odchýlka

Najjednoduchšia miera rizika tiež nespĺňa vlastnosti koherentnosti. Je ňou **štandardná odchýlka**, ktorú definujeme nasledovne:

$$\sigma = \sqrt{\text{var}L} = \sqrt{\text{var}R},$$

kde R , L sú náhodné veličiny zisku a straty zavedené vyššie.

Štandardná odchýlka sa uvádza ako miera volatility cenných papierov, a teda čím je väčšia, tým viac sa môže výnos z akcie líšiť od očakávaného a naopak, ak je volatilita nízka, resp. $\sigma = 0$, výnos z akcie môžeme považovať za stabilnú veličinu.

Odhady a predpovede budúcich hodnôt volatility sú v manažmente aktív kľúčové, no napriek tomu ako miery rizika neposkytujú dostatočné informácie. K tomuto záveru vedie skutočnosť, že štandardná odchýlka berie do úvahy nielen stratu, ale aj zisk, a to v rovnakom pomere, čo je pri meraní rizika skresľujúci fakt. V dnešnej dobe sa preto častejšie využívajú postupy zaoberajúce sa len pravým chvostom rozdelenia náhodnej veličiny L .

1.3 Hodnota v riziku (VaR)

Modelom zohľadňujúcim len stratu je **hodnota v riziku - Value at Risk (VaR)**. Jedná sa o nekoherentnú (nespĺňa vlastnosť subaditivity, čo je aj s konkrétnym príkladom odvodené v publikácii [5]), no aj napriek tomu dnes veľmi využívanú mieru trhového rizika. Môžeme ju definovať ako maximálnu možnú stratu z investície do finančného inštrumentu na určitej hladine spoľahlivosti za dané časové obdobie.

Pri jej výpočte sa často používa distribučná funkcia náhodnej veličiny L . Jej odhad nebýva triviálnym problémom, a preto sa mu bližšie venujeme v druhej kapitole. Nech je teda $F(x) = P(L \leq x)$ požadovaná distribučná funkcia a $F^{-1}(x)$ je jej kvantilová funkcia spĺňajúca

$$F^{-1}(\alpha) = \inf\{x; F(x) \geq \alpha\}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Označme VaR_α hodnotu v riziku na hladine $1 - \alpha$. Z definície hodnoty v riziku vyplýva, že $\text{VaR}_\alpha(L)$ je α -kvantilom rozdelenia náhodnej veličiny popisujúcej

stratu L . Píšeme

$$P(L \leq \text{VaR}_\alpha(L)) = \alpha,$$

$$P(L > \text{VaR}_\alpha(L)) = 1 - \alpha.$$

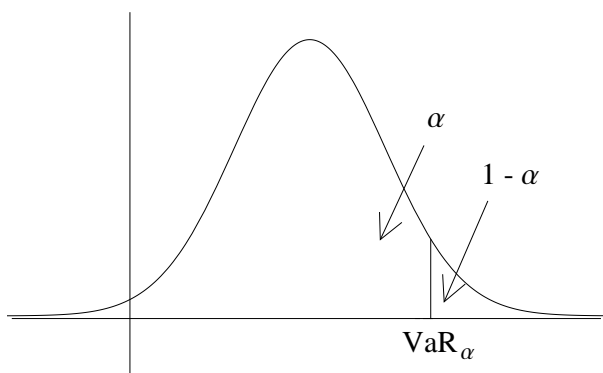
Za α sú najčastejšie dosadzované hodnoty 0,95 alebo 0,99, čo v prvom prípade znamená, že strata z investície do cenného papiera s pravdepodobnosťou 95% v danom časovom období nepresiahne hodnotu v riziku $\text{VaR}_{95}(L)$. Ako vhodné časové obdobia sú uvažované jednodenné alebo týždňové intervaly. Pri výpočte VaR pre inú časovú periódu môžeme použiť formulu odvodenú v knihe [5],

$$\text{VaR}_\alpha^t = \sqrt{t} \cdot \text{VaR}_\alpha^1,$$

kde VaR_α^t je t -denný VaR na hladine spoľahlivosti α a t je počet dní, z ktorého vychádzame. Takisto môžeme použiť odhad volatility σ_t v čase t a súčasnú cenu aktíva (P_0):

$$\text{VaR}_\alpha^t = \alpha \cdot \sigma_t \cdot P_0.$$

Pre ilustráciu je na obrázku 1.1 znázornený prípad, kedy má výnos z akcie normálne rozdelenie. Plocha napravo od hodnoty $\text{VaR}_\alpha(L)$ má obsah $1 - \alpha$, čo vyjadruje pravdepodobnosť, že strata presiahne túto hranicu.



Obr. 1.1: VaR_α pre normálne rozdelenie

Ako bolo spomenuté vyššie, z hľadiska koherentnosti VaR nie je vhodnou mierou odrážajúcou bežnú situáciu na finančných trhoch, no regulátori ju v praxi používajú najčastejšie. Jej výpočet je pomerne jednoduchý a aj bez vlastnosti subaditivity udáva postačujúce informácie pre tvorbu rezerv na prípadné straty spôsobené trhovými podmienkami. Nevýhodou však je, že uvažuje len určitú hladinu spoľahlivosti, a čo sa deje v prípadoch, kedy straty presiahnu určený α -kvantil, zanedbáva. Taktiež nepredpokladá existenciu ťažkých chvostov a cenových šokov, čiže jej použitie má veľa obmedzení. Aj preto boli vyvinuté jej modifikácie, ktoré ich čiastočne odstraňujú.

1.4 Podmienená hodnota v riziku (CVaR)

Jednou z mier kladúcich dôraz na extrémne straty presahujúce stanovený α -kvantil rozdelenia stratovej náhodnej veličiny je **podmienená hodnota v riziku**

- **Conditional Value at Risk (CVaR)**, tiež nazývaná maximálna očakávaná strata (Expected Shortfall).

Výhodou CVaR je okrem uvažovania extrémnych strát, zahrnutia ťažkých chvostov a cenových šokov aj koherentnosť, čo znamená, že v porovnaní s VaR realistickejšie odráža vlastnosti rizikovosti aktív. Ide o podmienenú mieru rizika, kde podmienkou je, že uvažujeme len straty presahujúce hodnotu v riziku VaR. Pre danú hladinu spoľahlivosti α teda CVaR definujeme predpisom uvedeným v prezentácii [4]:

$$\text{CVaR}_\alpha(L) = E(L | L > \text{VaR}_\alpha(L)).$$

Pre nami uvažovanú absolútne spojitú distribučnú funkciu náhodnej veličiny L sa dá podmienená hodnota v riziku určiť uvedeným výpočtom

$$\text{CVaR}_\alpha(L) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\text{VaR}_\alpha(L)}^{\infty} y f(y) dy,$$

kde $f(x)$ je hustota rozdelenia L . Ide teda o podmienenú strednú hodnotu extrémnych strát, ktorá dáva investorom informáciu o tom, akú veľkú stratu očakávať, ak presiahne najväčšiu možnú hodnotu nadobudnutú s hladinou spoľahlivosti α .

Podobne ako pri použití VaR, aj pri očakávanej maximálnej strate môžeme použiť na odhad rozdelenia náhodnej veličiny L neparametrické a parametrické metódy, prípadne vychádzať z usporiadaných diskretných údajov.

1.5 Ďalšie modifikácie hodnoty v riziku

Okrem podmienenej hodnoty v riziku CVaR existujú aj iné rozšírenia VaR berúce do úvahy extrémne straty a možné výchylky z cenových trendov pozorovateľných na finančnom trhu. Pri ich definíciách vychádzame z prezentácie [4].

Priemerná hodnota v riziku (AVaR)

Veľmi podobná podmienenej hodnote CVaR je **priemerná hodnota v riziku** - **Average Value at Risk (AVaR)**. Vypočítame ju nasledovne:

$$\text{AVaR}_\alpha(L) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 \text{VaR}_p(L) dp = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 F^{-1}(p) dp.$$

Zo vzorca je zrejmé, že AVaR je priemer zo všetkých hodnôt v riziku VaR pre hladiny spoľahlivosti z intervalu $[\alpha, 1]$, a preto sa v prípade AVaR tiež jedná o podmienenú mieru rizika. Aritmetický priemer je empirickým odhadom strednej hodnoty, čiže po substitúcii $y = F^{-1}(p)$ ďalej dostávame

$$\text{AVaR}_\alpha(L) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\text{VaR}_\alpha(L)}^{\infty} y f(y) dy,$$

čo zodpovedá výpočtu pre podmienenú hodnotu v riziku $\text{CVaR}_\alpha(L)$. Teda môžeme hovoriť, že AVaR je koherentnou rizikovou mierou.

Vážená priemerná hodnota v riziku (WAVaR)

Z AVaR vychádza **vážená priemerná hodnota v riziku - Weighted Average Value at Risk (WAVaR)**. Určíme ju vyjadrením uvedeným v prezentácii [4],

$$\text{WAVaR}_\mu(L) = \int_0^1 \text{AVaR}_\lambda(L) \mu(d\lambda),$$

kde μ je pravdepodobnostná miera na intervale $[0,1]$.

Mediánová hodnota v riziku (MVaR)

Mediánová hodnota v riziku - Median Value at Risk (MVaR) tiež patrí medzi podmienené rizikové miery. Ide totiž o medián z hodnôt presahujúcich hodnotu VaR na danej hladine spoľahlivosti α . Píšeme

$$\text{MVaR}_\alpha(L) = \text{Median}(L|L > \text{VaR}_\alpha(L)).$$

Z definície mediánu a rozpísaním podmienenej pravdepodobnosti dostávame

$$P(L \geq \text{MVaR}_\alpha(L)|L \geq \text{VaR}_\alpha(L)) = \frac{P(L \geq \text{MVaR}_\alpha(L), L \geq \text{VaR}_\alpha(L))}{P(L \geq \text{VaR}_\alpha(L))} = \frac{1}{2}. \quad (1.5)$$

Vyššie sme uviedli, že $P(L \geq \text{VaR}_\alpha(L)) = 1 - \alpha$, čoho dosadením do (1.5) vyjadríme nasledujúce:

$$P(L \geq \text{MVaR}_\alpha(L), L \geq \text{VaR}_\alpha(L)) = \frac{1}{2}(1 - \alpha). \quad (1.6)$$

Z definície MVaR je zrejmé, že hodnota MVaR je väčšia, nanajvýš rovná hodnote VaR . Po aplikovaní tohto poznatku na (1.6) máme

$$P(L \geq \text{MVaR}_\alpha(L)) = \frac{1}{2}(1 - \alpha),$$

z čoho priamo vyplýva, že $\text{MVaR}_\alpha(L) = \text{VaR}_{\frac{1+\alpha}{2}}(L)$. Jedná sa teda o nekoherentnú mieru rizika, pracujúcu na rovnakom princípe ako VaR , no s vyššou hladinou spoľahlivosti.

Kvantilová hodnota v riziku (QVaR)

Kvantilová hodnota v riziku - Quantile Value at Risk (QVaR) s parametrami α, β ($\text{QVaR}_{\alpha,\beta}(L)$) definujeme ako kvantil podmieneného rozdelenia straty ($L|L \geq \text{VaR}_\alpha(L)$):

$$\begin{aligned} P(L \geq \text{QVaR}_{\alpha,\beta}(L)|L \geq \text{VaR}_\alpha(L)) &= \frac{P(L \geq \text{QVaR}_{\alpha,\beta}(L), L \geq \text{VaR}_\alpha(L))}{P(L \geq \text{VaR}_\alpha(L))} \\ &= 1 - \beta. \end{aligned}$$

Podobne ako v prípade mediánovej hodnoty v riziku, aj tu platí, že kvantilová hodnota v riziku $\text{QVaR}_{\alpha,\beta}(L) \geq \text{VaR}_\alpha(L)$. Teda dostávame

$$P(L \geq \text{QVaR}_{\alpha,\beta}(L)) = (1 - \beta)(1 - \alpha),$$

čo implikuje, že $\text{QVaR}_{\alpha,\beta}$ je zároveň aj $(\alpha + \beta - \alpha\beta)$ -kvantilom rozdelenia náhodnej veličiny L a jedná sa o nekoherentnú mieru odhadu rizika.

1.6 Spektrálne miery rizika

Spektrálne rizikové miery sú, podľa článku [1], miery rizika založené na integráloch kvantilových funkcií rozdelenia straty L . Interpretujeme ich ako vážené priemery kvantilov daného rozdelenia, kde váhou je nezáporná, nerastúca, sprava spojitá a integrovateľná funkcia ϕ nazývaná spektrum. Je definovaná na intervale $[0,1]$ a navyše spĺňa $\int_0^1 \phi(p) dp$. S daným ϕ je teda predpis spektrálnej miery nasledovný:

$$M_\phi(L) = \int_0^1 F^{-1}(p) \phi(p) dp.$$

Ako je uvedené v prezentácii [4], v prípade, že distribučná funkcia F náhodnej veličiny L je absolútne spojitá a rýdzo rastúca na svojom definičnom obore, potom po substitúcii $F^{-1}(p) = y$ píšeme

$$M_\phi(L) = \int_{-\infty}^{\infty} y \phi(F(y)) f(y) dy,$$

kde f je hustota prislúchajúca distribučnej funkcii F . Takto definovaná spektrálna miera rizika je koherentná a navyše spĺňa aj ďalšie vlastnosti, vid' článok [1].

Podmienená hodnota v riziku CVaR je tiež spektrálna riziková miera so spektrom definovaným ako $\phi(p) = \frac{1}{\alpha} * \mathbb{I}_{[0,\alpha]}(p)$. Okrem uvedeného poznatku je v publikácii [1] zmieneny aj fakt, že každá spektrálna miera môže byť vyjadrená vo forme váženého priemeru podmienených hodnôt v riziku, čo ju priamo spája s váženou priemernou hodnotou v riziku WVaR.

Spektrálne miery sa vo svete financií a ich managementu používajú na zahrnutie averzie voči riziku z hľadiska investorov, ktorá sa pomocou nevážených mier vyjadriť nedá. Preto sa používa váhová funkcia ϕ , ktorá vyšším stratám priradzuje väčšiu váhu, čím lepšie odhaduje možné riziko aj so zohľadnením preferencií účastníkov trhu.

Pre názornosť v krátkosti zdefinujeme vybrané váhové funkcie, ktorými sú funkcia vychádzajúca z modelu proporcionálnych rizík, ako aj Wangova, exponenciálna, či duálna mocninná váhová funkcia vyjadrujúca postoj investora voči možnému riziku, ktorému sa na finančných trhoch vystavuje. Všetky sú spomenuté v prezentácii [4] s uvedenými predpismi:

- $\phi_{\text{hazard}}(u, \gamma) = \frac{1}{\gamma}(1 - u)^{\frac{1}{\gamma}-1}, \quad \gamma \geq 1,$

- $\phi_{Wang}(u, \delta) = \exp \left\{ -\delta \Phi^{-1}(u) - \frac{\delta^2}{2} \right\}, \quad \delta > 0,$
kde Φ^{-1} je kvantilovou funkciou normálneho rozdelenia $N(0,1)$,
- $\phi_{Arrow-Pratt}(u, k) = \frac{k \cdot \exp\{-k(1-u)\}}{1 - \exp\{-k\}},$
kde k je Arrow-Prattov stupeň absolútnej averzie voči riziku,
- $\phi_{dual-power}(u, \nu) = \nu u^{\nu-1}, \quad \nu \geq 1.$

Kapitola 2

Odhady mier rizika

V nasledujúcej kapitole sa budeme zaoberať vybranými postupmi pre odhady a výpočty rizikových mier. Všetky spomenuté prístupy môžu okrem použitia diskretných dát vychádzať aj z poznatku distribučnej funkcie rozdelenia náhodnej premennej L . Distribučná funkcia nám vo väčšine prípadov nie je známa, a preto je potrebné ju vhodne aproximovať. Odhadovať ju môžeme viacerými metódami, ktoré podľa dostupnosti informácií o analytickom rozdelení veličiny L delíme do dvoch základných skupín.

2.1 Neparametrické odhady

Neparametrické metódy používame v prípade, že nám rozdelenie strát L nie je známe, a teda ho musíme určiť. Uvedieme dva v tomto prípade často používané postupy, odhad z historických dát a simuláciu Monte Carlo.

Odhad z historických dát

Postup, v ktorom sa používajú ako podklad pre určenie rozdelenia strát dostupné historické dáta, patrí k metódam používajúcim nepodmienenú distribučnú funkciu, čiže v priebehu času statické rozdelenie náhodnej veličiny L . V našom prípade vychádza z empirického odhadu distribučnej funkcie na základe vývoja cien finančných nástrojov v minulosti a predpokladá, že rozdelenie budúcich strát je zhodné s rozdelením strát minulých.

Použitie tejto metódy je teda obmedzené dostupnosťou histórie cien a podmienkou statických zmien rizikových faktorov na finančných trhoch. Jednou z jej nevýhod je taktiež úloha výberu vhodne dlhého časového intervalu, ktorý obsahuje dáta uspokojujúce potreby odhadu. Mal by obsahovať ako obdobia recesie, tak obdobia expanzie ekonomiky a finančných trhov a s nimi aj extrémne hodnoty v rozdelení strát. V bežnej praxi sú najčastejšie používané dáta za uplynulých 2-5 rokov.

Dĺžka uvažovaného časového úseku ovplyvňuje výsledky vyplývajúce z použitia merítok rizika takisto z toho hľadiska, že maximálna odhadovaná strata je rovná najväčšej strate z minulosti, a teda metóda nepredpokladá výrazný neočakávaný prepád trhových cien akcií, čo môže viesť k nechceným finančným ujмам.

Uvedieme príklad výpočtu VaR a CVaR pomocou odhadu distribučnej funkcie rozdelenia strát z minulosti.

Príklad 2.1: Pomocou zabudovanej funkcie *FinancialData* softvéru *Mathematica* získame dáta o výnosoch akcií automobilovej spoločnosti BMW, firmy Johnson&Johnson z oblasti zdravotníckych pomôcok a podniku AT&T pôsobiaceho v telekomunikačnom odvetví z časového úseku dĺžky 2,5 roka.

Na obrázku 2.1 je vľavo vykreslený priebeh vývoja cien akcií daných spoločností od januára 2010 do konca júna 2012 a vpravo je znázornený vývoj zodpovedajúcich výnosov. Výnosy sme získali pomocou atribútu *Return* vo funkcii *FinancialData*.

Ďalej na straty (záporné výnosy) aplikujeme funkciu *SmoothKernelDistribution*, ktorá rozdelenia aproximuje pomocou jadrového odhadu hustoty. Hustotu pre hodnotu x odhaduje pomocou výrazu

$$\frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n k\left(\frac{x - x_i}{h}\right),$$

kde n je počet pozorovaní, $k(x)$ je vyrovňavacia jadrová funkcia a h je parameter šírky okienka. Čím je h väčšie, tým je odhad hladší.

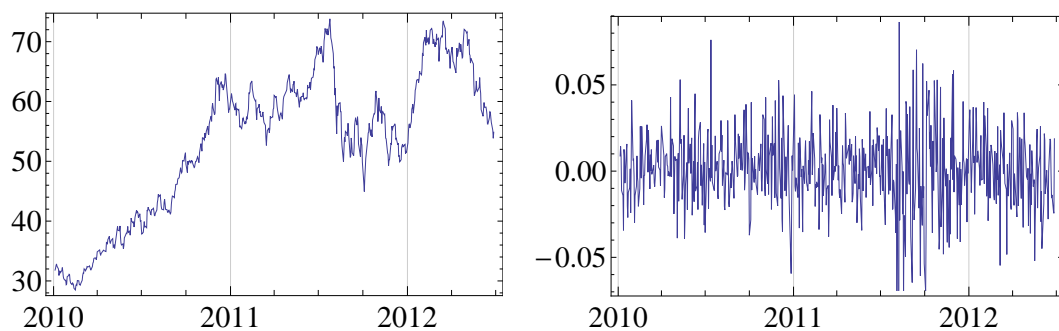
Na obrázku 2.2 sú znázornené grafy empirických hustôt rozdelení strát jednotlivých podnikov a v tabuľke 2.1 sú uvedené ich špicatosti.

	γ_2^D	γ_2^K
BMW	5,19043	4,97605
Johnson&Johnson	6,08583	5,84975
AT&T	4,49175	4,34399

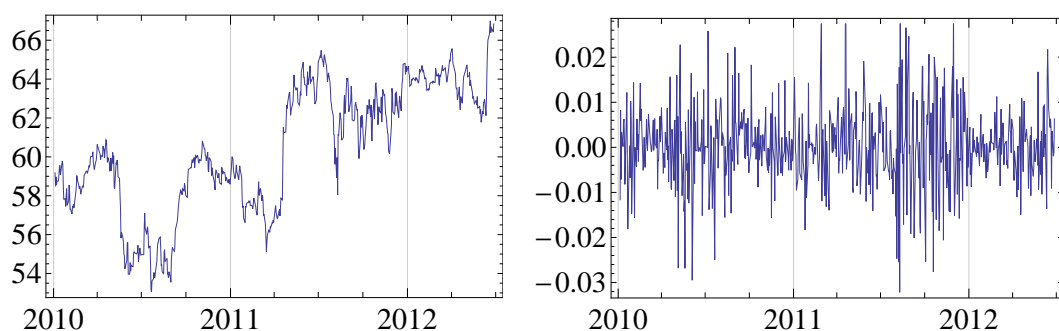
Tabuľka 2.1: Špicatosť dát (γ_2^D) a jadrového odhadu ich hustôt (γ_2^K)

Zvyčajne býva väčšia špicatosť indikátorom ťažších chvostov, no nie vždy je to tak. Zo špicatosti použitých dát a k nim prislúchajúcich ilustrácií vidíme, že v našich údajoch tento poznatok platí. Pre určenie VaR_α na konkrétnych hladinách spoľahlivosti použijeme funkciu *Quantile*.

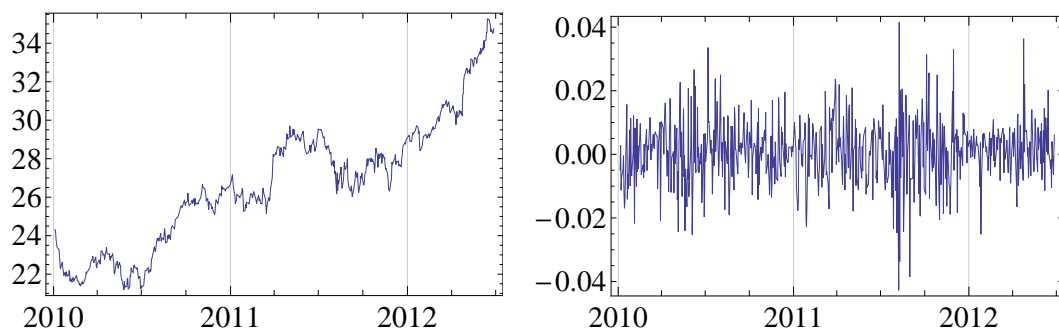
V tabuľke 2.2 sú vyčíslené maximálne relatívne straty na určených hladinách spoľahlivosti α za jedno časové obdobie na daných investičných inštrumentoch a k nim prislúchajúce podmienené hodnoty CVaR. Na ich výpočet sme použili okrem jadrového odhadu aj disktrétne historické dáta z čoho vidíme, že hodnoty



BMW



Johnson&Johnson

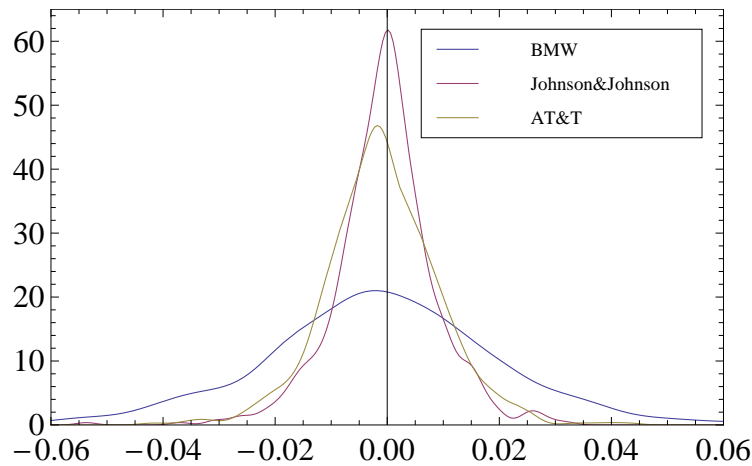


AT&T

Obr. 2.1: Vývoj cien a výnosov

pre konkrétne konfidenčné úrovne α sú takmer rovnaké. Jadrový odhad hustoty teda presnosťou vyhovuje potrebám aproximácie rozdelenia náhodnej veličiny L z historických dát.

Je zrejmé, že výsledné hodnoty VaR a CVaR z tabuľky 2.2 zodpovedajú hustotám zobrazeným na obrázku 2.2.



Obr. 2.2: Hustota rozdelenia strát - odhad z histórie

	α	VaR_α^D	VaR_α^K	CVaR_α^D	CVaR_α^K
BMW	0,9	0,0257582	0,0248265	0,0400782	0,0393693
	0,95	0,0351584	0,0351638	0,0501108	0,0494467
	0,99	0,0594451	0,0593997	0,0770656	0,0774741
	0,999	0,120395	0,122367	0,124897	0,122367
Johnson & Johnson	0,9	0,0103966	0,0103855	0,0162064	0,0160052
	0,95	0,0146518	0,0146065	0,0200639	0,0197606
	0,99	0,0253773	0,025343	0,0284015	0,0280682
	0,999	0,031977	0,0321828	0,0333395	0,0321828
AT&T	0,9	0,0117966	0,0113208	0,0179836	0,0176164
	0,95	0,0161685	0,0162338	0,0222398	0,0219168
	0,99	0,0249599	0,0243148	0,0322841	0,0317073
	0,999	0,0424847	0,0427788	0,0444162	0,0427788

Tabuľka 2.2: VaR_α a CVaR_α pre jednotlivé hodnoty α - odhad z minulosti (priamo z dát (D), z jadrového odhadu (K))

Metóda Monte Carlo

Ďalším neparametrickým prostriedkom odhadu rozdelenia strát je **metóda Monte Carlo**. V nej, narozdiel od historickej simulácie, môžeme uvažovať okrem nepodmienennej aj podmienenú distribučnú funkciu, a teda v závislosti na čase dynamické zmeny rozdelenia rizikového faktora. Ďalej sa budeme pre možnosť porovnania s metódou odhadu z histórie dát zaoberať nepodmieneným variantom.

Verzia so v závislosti na čase statickým rozdelením môže používať predpoklady predchádzajúceho postupu, a teda uvažovať, že vývoj rizikového faktora sa v budúcnosti nebude odlišovať od vývoja v minulosti alebo ho môže určiť pomocou odborných odhadov vychádzajúcich z predikcií situácie na finančnom trhu. Z predpokladaného vývoja sa potom určí vybrané množstvo simulácií správania sa cien v nasledujúcom časovom období a z nich sa odhadne rozdelenie strát, z ktorého sa určí VaR. Pre porovnanie výsledkov získaných historickým odhadom

a metódou Monte Carlo uvádzame príklad výpočtu VaR aj druhým postupom.

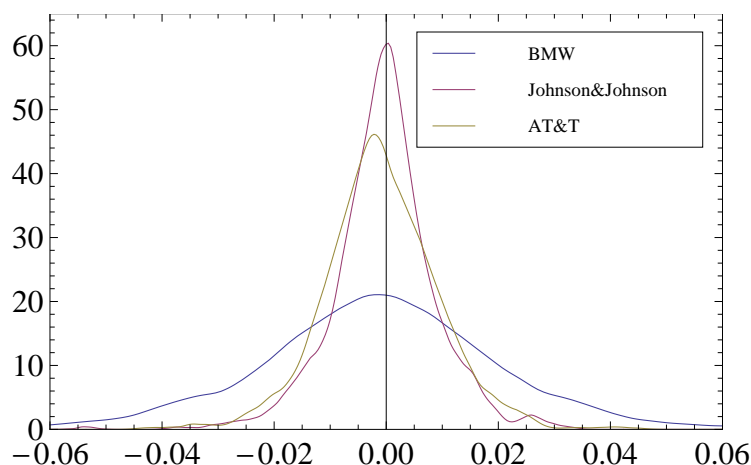
Príklad 2.2: Použijeme rovnaké dáta ako v predchádzajúcom príklade a pomocou nich simulujeme 100 000 scenárov (funkcia *RandomVariate*), na základe ktorých vytvoríme nové odhady distribučných funkcií rozdelenia strát. Predpokladáme, že 100 000 je dostatočne veľké číslo na zabezpečenie presnosti metódy.

Na obrázku 2.3 sú uvedené grafy hustôt odhadnutých zo simulácií podľa minulého priebehu. Vidíme, že sa od hustôt určených z historických dát veľmi nelíšia, čomu zodpovedajú aj vypočítané hodnoty v riziku na daných konfidenčných úrovniach VaR_α a príslušné CVaR_α uvedené v tabuľke 2.4. Z porovnania špicatostí z tabuliek 2.1 a 2.3 je zrejmé, že aj tie sú si hodnotami veľmi blízke.

Rovnako ako v príklade 2.1, aj tu sme na výpočet pre porovnanie použili jadrový odhad aj nasimulované diskkrétne dáta.

	γ_2^D	γ_2^K
BMW	4,95839	4,92966
Johnson&Johnson	5,90779	5,86642
AT&T	4,34355	4,31112

Tabuľka 2.3: Špicatosť nasimulovaných dát (γ_2^D) a jadrového odhadu ich hustôt (γ_2^K) - metóda Monte Carlo



Obr. 2.3: Hustota rozdelenia strát - Monte Carlo

Podľa dosiahnutých výsledkov a na základe ich porovnania môžeme prehlásiť, že neparametrické metódy udávajú takmer rovnaké hodnoty, a preto je voľba medzi nimi ponechaná na konkrétného užívateľa.

	α	VaR_α^D	VaR_α^K	CVaR_α^D	CVaR_α^K
BMW	0,9	0,0257571	0,0256254	0,0401001	0,039975
	0,95	0,0352192	0,0350926	0,0500885	0,04994
	0,99	0,0597078	0,0596156	0,0767957	0,0766971
	0,999	0,11987	0,119921	0,125149	0,124954
Johnson & Johnson	0,9	0,0105166	0,0104732	0,016284	0,0162444
	0,95	0,0147102	0,0146978	0,0201257	0,0200794
	0,99	0,0252656	0,025317	0,0283368	0,028285
	0,999	0,0319726	0,0319573	0,0333997	0,0332704
AT&T	0,9	0,0118559	0,0118098	0,0179973	0,0179308
	0,95	0,0161538	0,0160846	0,0222241	0,0221651
	0,99	0,0249986	0,0249298	0,0321301	0,0320452
	0,999	0,0425021	0,0423624	0,0446506	0,0445167

Tabuľka 2.4: VaR_α a CVaR_α pre jednotlivé hodnoty α - Monte Carlo (priamo z nasimulovaných dát (D), z jadrového odhadu (K))

2.2 Parametrické odhady

Druhou skupinou postupov, ktoré sa uplatňujú pri odhadoch distribučnej funkcie, sú parametrické metódy. Využívame ich v prípade, že poznáme rozdelenie náhodnej veličiny, ale jej parametre sú nám neznáme. Úlohou je teda vhodne ich aproximovať a na takto určené rozdelenia použiť jednotlivé rizikové miery.

Ďalej budeme na naše dáta aplikovať vybrané rozdelenia, odhadneme príslušné parametre a určíme hodnoty daných mier rizika. Opäť sa budeme zaoberať nepodmienenými rozdeleniami.

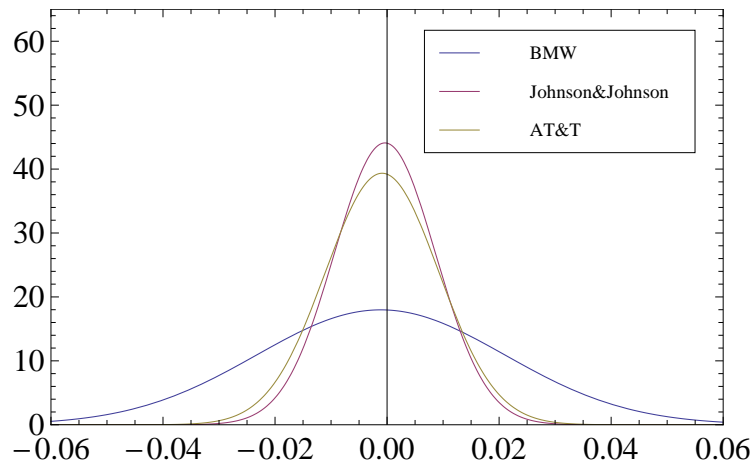
Normálne rozdelenie

Ako prvé použijeme normálne rozdelenie aj napriek tomu, že zanedbáva špicatosť dát - špicatosť normálneho rozdelenia je konštantná, $\gamma_2 = 3$, a nezávisí na parametroch.

Parametre odhadujeme pomocou funkcie *EstimatedDistribution*. V tabuľke 2.5 sú uvedené ich konkrétne hodnoty pre uvažované podniky a na obrázku 2.4 vykreslené grafy hustôt normálneho rozdelenia s danými strednými hodnotami a rozptylmi.

	μ	σ^2
BMW	-0,00111969	0,000492426
Johnson&Johnson	-0,000383193	0,0000818696
AT&T	-0,000880513	0,000102792

Tabuľka 2.5: Odhady parametrov normálneho rozdelenia



Obr. 2.4: Hustota rozdelenia strát - normálne rozdelenie

V tabuľke 2.6 sú zahrnuté pomocou aproximácie normálnym rozdelením vypočítané hodnoty VaR a CVaR.

Ako je z grafov 2.2 a 2.4 zrejmé, špicatosť normálneho rozdelenia v prípade spoločností Johnson&Johnson a AT&T je výrazne nižšia ako špicatosť samotných dát, a teda normálne rozdelenie nie je vhodným rozdelením na odhad rozdelenia strát pozorovaných na akciách spomenutých podnikov.

	α	VaR_α	CVaR_α
BMW	0,9	0,0273188	0,0378246
	0,95	0,0353807	0,0446533
	0,99	0,0505036	0,0580232
	0,999	0,0674547	0,0735983
Johnson & Johnson	0,9	0,0112125	0,0154962
	0,95	0,0144997	0,0182806
	0,99	0,020666	0,0237322
	0,999	0,0275778	0,0300829
AT&T	0,9	0,0121127	0,0169126
	0,95	0,0157961	0,0200326
	0,99	0,0227055	0,0261412
	0,999	0,0304503	0,0332572

Tabuľka 2.6: VaR_α a CVaR_α pre jednotlivé hodnoty α - normálne rozdelenie

Laplaceovo rozdelenie

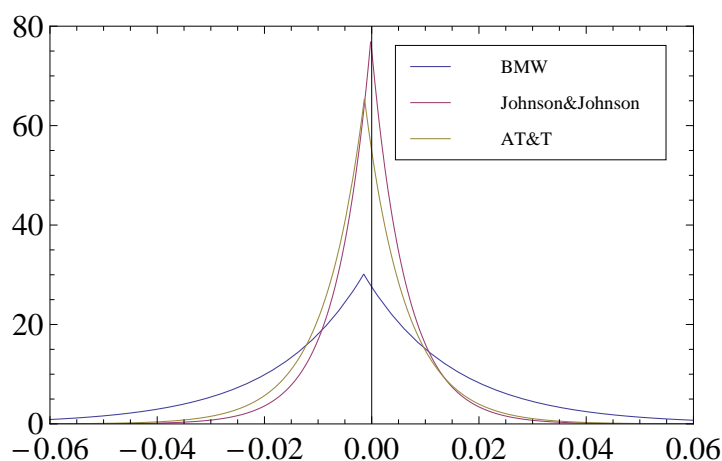
Pre lepší odhad rozdelenia náhodnej veličiny zobrazujúcej stratu L vychádzame z tabuľky 2.1, kde vidíme, že špicatosti historických dát sú vyššie ako jej hodnota v prípade normálneho rozdelenia. Použijeme teda Laplaceovo rozdelenie, ktorého špicatosť je taktiež konštanta a jej hodnota je 6.

Opäť počítame pomocou funkcie *EstimatedDistribution*, stredné hodnoty a parametre merítka vid' tabuľka 2.7.

	μ	β
BMW	-0,00149075	0,0165851
Johnson&Johnson	-0,000170796	0,00647216
AT&T	-0,00135842	0,0076222

Tabuľka 2.7: Odhady parametrov Laplaceovho rozdelenia

Na obrázku 2.5 sú v grafe vykreslené hustoty Laplaceovho rozdelenia pre jednotlivé podniky s vyššie uvedenými parametrami. Pri porovnaní s grafom 2.2 vidíme, že tentokrát je hustota rozdelenia relatívnych strát na akciách Johnson&Johnson a AT&T aproximovaná podstatne presnejšie ako v prípade prvého rozdelenia.



Obr. 2.5: Hustota rozdelenia strát - Laplaceovo rozdelenie

V tabuľke 2.8 je uvedená hodnota VaR spolu s jej podmieneným variantom CVaR pre odhad Laplaceovým rozdelením. Pri porovnaní s číslami z tabuľky 2.6 môžeme povedať, že s vyššou špicatosťou rastú aj podmienené hodnoty v riziku CVaR a viac sa blížia k hodnotám z tabuľky 2.2.

Studentovo t rozdelenie

Aj napriek tomu, že hodnoty mier rizika použitých na distribučné funkcie Laplaceovho rozdelenia, sa blížili k hodnotám odhadnutým z historických dát, naše dáta majú rôzne špicatosti, a preto použijeme Studentovo t rozdelenie, ktorého špicatosť nie je konšantou a jej veľkosť závisí na počte stupňov voľnosti ν .

Špicatosť klesajúca s rastúcim počtom stupňov voľnosti ν nadobúda konečné hodnoty ak platí, že $\nu > 4$. Výhodou funkcie *EstimatedDistribution* zo softvéru

	α	VaR_α	CVaR_α
BMW	0,9	0,025202	0,0417871
	0,95	0,0366979	0,0532831
	0,99	0,0633907	0,0799758
	0,999	0,101579	0,118164
Johnson & Johnson	0,9	0,0102457	0,0167179
	0,95	0,0147319	0,0212041
	0,99	0,0251484	0,0316206
	0,999	0,0400511	0,0465233
AT&T	0,9	0,010909	0,0185313
	0,95	0,0161924	0,0238146
	0,99	0,0284598	0,036082
	0,999	0,0460106	0,0536328

Tabuľka 2.8: VaR_α a CVaR_α pre jednotlivé hodnoty α - Laplaceovo rozdelenie

Mathematica je, že uvažuje ν reálne a nemusí byť nutne celé. Aplikujeme ju teda na záporné výnosy akcií vybraných spoločností a vypočítame parametre Studentovho t rozdelenia, parameter polohy μ , parameter merítka σ a počet stupňov voľnosti ν . Hustota Studentovho t rozdelenia s uvedenými parametrami má nasledovný predpis:

$$t(\mu, \sigma, \nu) = \frac{\left(\frac{\nu}{\nu + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \right)^{\frac{1+\nu}{2}}}{\sqrt{\nu} \sigma B\left[\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right]}.$$

Ich konkrétne odhadnuté hodnoty sú uvedené v tabuľke 2.9, kde vidíme, že v dátach spoločnosti Johnson&Johnson je $\nu \leq 4$, z čoho vyplýva, že špicatosť v tomto prípade nenadobúda konečnej hodnoty.

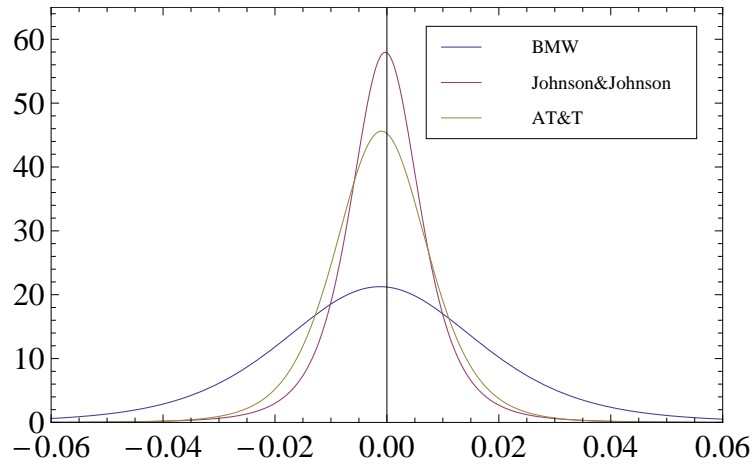
	μ	σ	ν
BMW	-0,0012391	0,0179638	5,69158
Johnson&Johnson	-0,000301351	0,00643727	3,69125
AT&T	-0,000967957	0,00840536	6,24521

Tabuľka 2.9: Odhady parametrov Studentovho t rozdelenia

Pre porovnanie špicatostí Studentovho t rozdelenia s ostatnými odhadmi uvidíme ich hodnoty v tabuľke 2.10.

	γ_2
BMW	6,54698
Johnson&Johnson	neexistuje
AT&T	5,67236

Tabuľka 2.10: Špicatosť dát - Studentove t rozdelenie



Obr. 2.6: Hustota rozdelenia strát - Studentovo t rozdelenie

Ďalej v tabuľke 2.11 uvádzame vypočítané hodnoty VaR a CVaR Studentovho t rozdelenia s danými parametrami.

Výpočty sú veľmi blízke tým z tabuľky 2.2, no CVaR je najmä na hladine $\alpha = 0,999$ podstatne vyššia, čo môže byť dôsledkom vyšších špicatostí, a tým spôsobených ťažších chvostov. V porovnaní s odhadmi normálnym a Laplaceovým rozdelením, by sme mohli potvrdiť, že s vyššou špicatosťou rastie aj podmienená hodnota v riziku.

	α	VaR_α	CVaR_α
BMW	0,9	0,0247973	0,0385897
	0,95	0,0340095	0,0482921
	0,99	0,0562547	0,0731297
	0,999	0,0954402	0,118945
Johnson & Johnson	0,9	0,00973016	0,0163831
	0,95	0,0137585	0,0212749
	0,99	0,0249726	0,0357544
	0,999	0,0500121	0,0694307
AT&T	0,9	0,0110757	0,0172375
	0,95	0,015251	0,0215409
	0,99	0,0251036	0,0322959
	0,999	0,0417845	0,0513688

Tabuľka 2.11: VaR_α a CVaR_α pre jednotlivé hodnoty α - Studentovo t rozdelenie

Asymetrické Laplaceovo rozdelenie

Predchádzajúce metódy predpokladali symetrické rozdelenie dát, no v praxi to tak väčšinou nie je. Nami použité dáta tiež obsahujú malé asymetrie, a pre-

to si ďalej predstavíme metódu odhadu asymetrickým Laplaceovým rozdelením. Od symetrického rozdelenia sa líši aj tým, že jeho špicatosť nie je konštantná, no nikdy nie je nižšia ako 6.

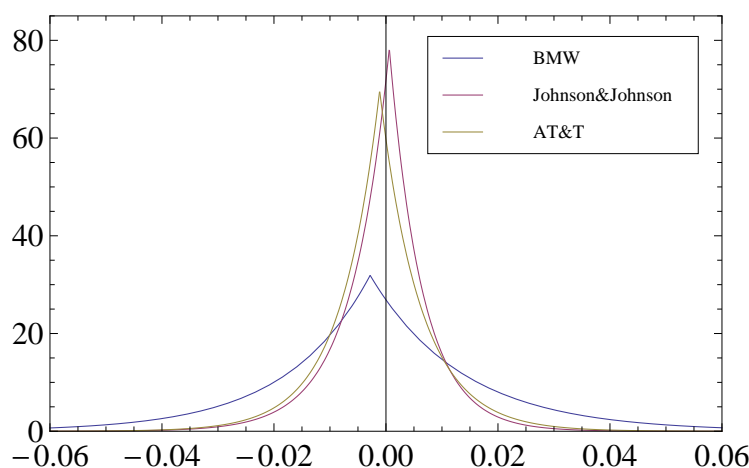
V *Mathematice* sa distribučná funkcia pre uvedené rozdelenie nenachádza, a preto na jej definíciu použijeme funkciu *ProbabilityDistribution*, kde definujeme explicitné vyjadrenie hustoty, vid' prezentáciu [4], s parametrami θ , κ , τ , ktoré v tomto poradí označujú parameter polohy, tvaru a parameter merítka. Metóda maximálnej vierohodnosti, ktorá je východiskovou metódou odhadu parametrov rozdelenia vo funkcii *EstimatedDistribution* v tomto prípade na výpočet nestačí, a preto k tomuto účelu použijeme metódu centrálnych momentov. Hodnoty jednotlivých odhadov sú uvedené v tabuľke 2.12.

Aj v tomto prípade sme grafy hustôt vykreslili do spoločného obrázka 2.7. Vidíme, že sú veľmi podobné tým z predchádzajúceho Laplaceovho rozdelenia, v ktorom je parameter κ rovný 1, a teda v našom prípade je z hodnôt z tabuľky 2.12 zrejmé, že používané dáta sú takmer symetrické.

	θ	κ	τ
BMW	-0,00282442	0,947001	0,0221251
Johnson&Johnson	-0,000301351	1,08022	0,00899468
AT&T	-0,000967957	0,947001	0,0221251

Tabuľka 2.12: Odhady parametrov asymetrického Laplaceovho rozdelenia

Takisto špicatosti, vid' tabuľka 2.13, sú mierne zvýšené, čo v tomto prípade spôsobilo väčšiu maximálnu očakávanú stratu na hladinách spoľahlivosti $\alpha = 0,99$ a $0,999$.



Obr. 2.7: Hustota rozdelenia strát - asymetrické Laplaceovo rozdelenie

Z uvedených rozdelení si môžeme pre odhad VaR a jej modifikácií vybrať ľubovoľné, no nie všetky uspokojivo zobrazujú realitu. Pomocou funkcie *LogLi-*

	γ_2
BMW	6,03531
Johnson&Johnson	6,07034
AT&T	6,00361

Tabuľka 2.13: Špicatost' dát - asymetrické Laplaceovo rozdelenie

	α	VaR_α	CVaR_α
BMW	0,9	0,0246392	0,0411596
	0,95	0,0360903	0,0526107
	0,99	0,0626788	0,0791992
	0,999	0,100718	0,117239
Johnson & Johnson	0,9	0,00960366	0,0154915
	0,95	0,0136848	0,0195727
	0,99	0,023161	0,0290488
	0,999	0,0367183	0,0426061
AT&T	0,9	0,0107328	0,0180252
	0,95	0,0157875	0,0230799
	0,99	0,0275242	0,0348166
	0,999	0,0443156	0,051608

Tabuľka 2.14: VaR_α a CVaR_α pre jednotlivé hodnoty α - asymetrické Laplaceovo rozdelenie

likelihood určíme hodnoty logaritmickej vierohodnostnej funkcie l pre aproximácie dát každým z rozdelení a určíme tak najvhodnejšiu z nich.

V tabuľke 2.15 sú uvedené vypočítané hodnoty pre jednotlivé spoločnosti a príslušné predpokladané rozdelenia strát L . Z hodnôt je vidieť, že dáta každej zo spoločností majú iné vlastnosti, a teda v každom z prípadov sú na odhad vyhovujúce iné rozdelenia.

	Normálne rozdelenie	Laplaceovo rozdelenie	Studentovo t rozdelenie	Asymetrické Laplaceovo rozdelenie
BMW	1514.72	1525.6	1533.02	1524.54
Johnson&Johnson	2057.19	2095.67	2091.47	2094.84
AT&T	1985.96	1993.79	1999.54	1992.62

Tabuľka 2.15: Hodnoty logaritmickej vierohodnostnej funkcie l pre odhady pomocou parametrických metód

Najlepšou alternatívou sa podľa výsledkov uvedených v tabuľke 2.15 javí Studentovo t rozdelenie, pri ktorom sú hodnoty logaritmickej vierohodnostnej funkcie l pomerne vysoké v každom z prípadov. Ostatné rozdelenia sú vyhovujúce iba pri niektorých použitých údajoch. Asymetrické Laplaceovo rozdelenie patrí, aj napriek pokrytiu nesymetrických vlastností dát, medzi vhodnejšie rozdelenia používané na aproximáciu rozdelenia strát len v prípade spoločnosti

Johnson&Johnson, no jeho symetrická varianta je akceptovateľná vo všetkých prípadoch. Normálne rozdelenie vykazuje pri každom z rizikových faktorov nízke hodnoty funkcie l , a teda by jeho použitie malo byť užívateľom vopred zvážené.

Variančno-kovariančná metóda

Doteraz sme sa zaoberali situáciou, kedy cena aktív závisí na jednom rizikovom faktore. Na finančných trhoch je však bežné, že cena finančných inštrumentov je ovplyvňovaná viacerými trhovými parametrami, a teda okrem odhadu distribučnej funkcie vhodne popisujúcej rozdelenie straty je dôležité približne určiť aj mieru závislosti jednotlivých rizikových faktorov.

Často používaným postupom určenia združenej distribučnej funkcie a následného odhadu VaR je **Variančno-kovariančná metóda**. Takisto ako predchádzajúce metódy, aj tento prístup sa môže používať v prípade nepodmieneného aj podmieneného rozdelenia strát. Ďalej v práci uvažujeme nepodmienené distribučné funkcie.

Podstatou metódy je empirický odhad vektora stredných hodnôt μ a kovariančnej matice Σ a ich následného dosadenia do vybraného rozdelenia strát. Najčastejšie sa predpokladá, že vzájomnú závislosť jednotlivých rizikových faktorov a ich združenú distribučnú funkciu možno odhadnúť viacrozmerným normálnym rozdelením. Z vypočítaného rozdelenia sa následne určí hodnota v riziku VaR.

Príklad 2.3: Pre znázornenie vplyvu viacerých rizikových faktorov na výnos investora z nákupu finančných nástrojov ukážeme výpočet hodnoty v riziku a jej modifikácie (CVaR) pre portfólio akcií. Uvažujeme cenné papiere spoločností z predchádzajúcich príkladov, z ktorých pomocou Markovitzovho prístupu vytvoríme optimálne portfólio. Najprv však musíme kvôli odlišným biznisovým dňom v Európe a Spojených štátoch upraviť dĺžku dát, aby sme mali pre každý deň údaje o akciách všetkých troch z podnikov. Potom pri stanovenom očakávanom výnose $r = 0,0008$ minimalizujeme riziko, ktorému sa zakúpením aktív investor vystavuje. Pomer, v akom vyberieme zložky portfólia pri minimalizovaní možného rizika na hodnotu $\sigma = 0.00921071$ je nasledovný:

$$x_{BMW} = 0,0141382, \quad x_{J\&J} = 0,237534 \text{ a } x_{AT\&T} = 0,748327. \quad (2.1)$$

Pomocou funkcie *EstimatedDistribution* z vybraných dát odhadneme parametre viacrozmerného normálneho rozdelenia, ktorými sú v *Mathematice* vektor stredných hodnôt μ a kovariančná matica Σ . Nižšie sú uvedené ich hodnoty.

$$\mu = \begin{pmatrix} -0,00109235 \\ -0,000422996 \\ -0,000914146 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 0,000494864 & 0,0000961463 & 0,0000971836 \\ 0,0000961463 & 0,0000824358 & 0,0000544259 \\ 0,0000971836 & 0,0000544259 & 0,000103392 \end{pmatrix}.$$

V odhade vzájomnej závislosti jednotlivých rizikových faktorov vo variančno-kovariančnej metóde zohráva dôležitú úlohu korelačný koeficient ρ . V prípade

nami vybraných dát o dĺžke 620 údajov zodpovedajúcej 2,5-ročnému časovému úseku sú medzi stratami spôsobenými poklesom cien akcií hodnoty korelácie vyjadrené uvedenou korelačnou maticou:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0,476027 & 0,429641 \\ 0,476027 & 1 & 0,589527 \\ 0,429641 & 0,589527 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pomocou štatistických funkcií systému *Mathematica* určíme, či sú pre našu dĺžku náhodných výberov dané hodnoty korelačných koeficientov významné, a teda implikujú závislosť vektorov. Použijeme test nezávislosti vychádzajúci z koeficientu korelácie, kde je testová štatistika t daná predpisom

$$t = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} \sqrt{n - 2},$$

kde t má Studentovo t rozdelenie o $n - 2$ stupňoch voľnosti. Ďalej vypočítame p -hodnotu zodpovedajúcu danému počtu pozorovaní a hodnotám korelačných koeficientov pomocou funkcie *StudentTPValue*:

$$p_1 = 2,202 \cdot 10^{-36}, p_2 = 3,05581 \cdot 10^{-29} \text{ a } p_3 = 2,69908 \cdot 10^{-59},$$

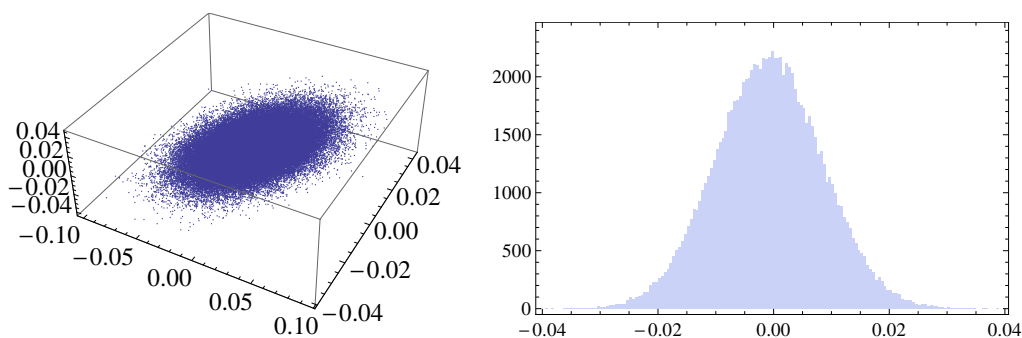
kde p_1 označuje p -hodnotu zodpovedajúcu údajom z BMW a Johnson&Johnson, p_2 minimálnu požadovanú hodnotu korelácie medzi BMW a AT&T a p_3 je p -hodnotou pre tretiu kombináciu spoločností, Johnson&Johnson a AT&T. Z výsledných p -hodnôt a príslušných korelačných koeficientov je zrejmé, že závislosť medzi stratami z akcií uvedených spoločností je pomerne vysoká.

Pre výpočet VaR nasimulujeme z vybraného trojrozmerného normálneho rozdelenia 100 000 trojíc scenárov, ako sa môžu vyvíjať náhodné veličiny zobrazujúce straty. Každú z trojíc vynásobíme váhami x_1 , x_2 a x_3 , čím sa dostaneme ku konečným možným stratám investora investujúceho svoje financie v danom pomere do vybraných akcií. Následne pomocou funkcie *Quantile* vypočítame hodnoty VaR_α na uvažovaných hladinách spoľahlivosti α a k nim prislúchajúce podmienené hodnoty v riziku, ktoré uvádzame v tabuľke 2.16. Pre ilustráciu na obrázku 2.8 uvádzame trojrozmerné zobrazenie vývoja vzájomne závislých rizikových faktorov definujúcich stratu spolu s histogramom celkových strát plynúcich z investície do portfólia.

α	VaR_α	CVaR_α
0,9	0,0109748	0,0153336
0,95	0,0143014	0,0181757
0,99	0,0206473	0,0238071
0,999	0,0277784	0,0301024

Tabuľka 2.16: VaR_α a CVaR_α pre jednotlivé hodnoty α - variančno-kovariančná metóda

Metóda variancie a kovariancie je postavená na silnom predpoklade, že závislosť rizikových faktorov vyskytujúcich sa na finančných trhoch pri oceňovaní aktív



Obr. 2.8: Simulácia strát pomocou variančno-kovariančnej metódy

a rizika z nich plynúceho možno odhadnúť korelačnou maticou a ich združené rozdelenie určiť viacrozmerným normálnym rozdelením. Pri pohľade na hodnoty uvedené v tabuľke 2.15 vidíme, že normálne rozdelenie nepatrí medzi rozdelenia vhodne aproximujúce distribučnú funkciu náhodnej veličiny L zobrazujúcej stratu z investícií na finančnom trhu. K tomuto účelu lepšie slúži napríklad Studentovo t rozdelenie.

Z uvedeného príkladu je zrejmé, že podmienka použitia variančno-kovariančnej metódy sa v mnohých prípadoch s bežnou situáciou v praxi nezhoduje. Riešením tohto problému sa budeme zaoberať v nasledujúcej kapitole.

Kapitola 3

Kopuly a miery rizika

V súčasnosti sa výpočet mier trhového rizika závislých na viacerých rizikových faktoroch hlavne v akademických obciach odvracia od použitia variančno-kovariančnej metódy. Medzi dôvody, ktoré tento vývoj rizikových mier sprevádzali patria jej vlastnosti uvedené vyššie, no ide hlavne o nekonzistentnosť výpočtov s reálnou situáciou na trhu. Trhové rizikové faktory majú zväčša ťažké chvosty, rôznu šikmosť a ich vzájomná závislosť nie je symetrická, čo je prepokladom variančno-kovariančnej metódy.

Ako sme vyššie ukázali, normálne rozdelenie zvyčajne nepatrí medzi rozdelenia, ktoré je vhodné použiť pri odhade rozdelenia rizikových faktorov. Lepšiu aproximáciu poskytuje Studentovo t rozdelenie, no aj to má vo viacrozmernom prípade svoje nevýhody. Jednou z nich je skutočnosť, že použité marginálne náhodné veličiny môžu mať rôzny počet stupňov voľnosti, a tým vzniká ďalší problém v určovaní ich vzájomnej závislosti.

Metódy, ktoré sa v dnešnej dobe používajú na popísanie správania marginálnych rizikových faktorov a bližšie určujú štruktúru ich závislosti, sa nazývajú kopula funkcie. Nezaoberajú sa len závislosťou danou korelačným koeficientom ρ , ako je to v prípade variančno-kovariančnej metódy, ale vyjadrujú ju v kvantilovom merítke, ktoré je prirodzenou súčasťou odhadu rizík ovplyvňujúcich dianie na finančných trhoch.

Kopuly umožňujú rôzne kombinácie marginálnych distribučných funkcií a prístupov k vyjadreniu závislosti medzi nimi, vďaka čomu sa môžu lepšie aplikovať na konkrétne uvažované rizikové faktory. V tretej kapitole zdefinujeme kopula funkcie a následne ich aplikujeme na vybrané dáta za účelom porovnania s metódou variancie-kovariancie a medzi sebou navzájom.

3.1 Miery závislosti

V teórii kopúl a ich aplikácií na vybrané dáta je dôležité určiť, akú mieru závislosti na odhad potrebujeme a či má daná kopula vlastnosti vhodne odrážajúce správanie sa rizikových faktorov na trhu. Doteraz sme pri meraní závislosti uvažovali

korelačný koeficient ρ , ktorý vyjadruje mieru lineárnej závislosti medzi jednotlivými náhodnými vektormi, no kopuly ponúkajú širšie možnosti ako ju určiť. Sú nimi ukazovatele súhlasnosti, Kendallovo τ a Spearmanovo ρ , a chvostové závislosti.

Pre lepšie pochopenie, čo konkrétne miery závislosti znamenajú, zavedieme pojmy súhlasnosti a nesúhlasnosti rovnako ako sú popísané v publikácii [6].

Definícia 3.1: *Nech (x_i, y_i) a (x_j, y_j) sú dve pozorovania z vektora (X, Y) spojitých náhodných veličín. Hovoríme, že (x_i, y_i) a (x_j, y_j) sú súhlasné, ak $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ a nesúhlasné, ak $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$.*

Nech je teda c počet súhlasných párov a d počet nesúhlasných párov vo vektore náhodných veličín (X, Y) , potom Kendallovo τ definujeme ako

$$\tau = \frac{c - d}{c + d},$$

čo je rozdiel medzi pravdepodobnosťou súhlasnosti a nesúhlasnosti pre náhodne vybraný pár z vektora nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín (X, Y) . Nech sú teda (X_1, Y_1) a (X_2, Y_2) nezávislé rovnako rozdelené náhodné vektory so združenou distribučnou funkciou H . Potom píšeme:

$$\tau_{X,Y} = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0].$$

Spearmanovo ρ definujeme podobne

$$\rho_{X,Y} = 3(P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]),$$

kde (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) a (X_3, Y_3) sú nezávislé náhodné vektory so združenou distribučnou funkciou H . V Spearmanovom ρ uvažujeme vektor (X_1, Y_1) s definovanou združenou distribučnou funkciou H a vektor (X_2, Y_3) s nezávislými zložkami. Ďalšie vlastnosti daných koeficientov závislosti možno nájsť v knihe [6].

Vo vzájomne závislých reálnych dátach z finančných trhov taktiež často pozorujeme tzv. chvostové závislosti, kedy sú jednotlivé rizikové faktory viac navzájom ovplyvňované v nepriaznivých, alebo naopak v priaznivých trhových podmienkach. Tieto vlastnosti rizikových faktorov môžeme vyjadriť pomocou koeficientov hornej a dolnej chvostovej závislosti, ktoré sú súčasťou charakteristiky niektorých vybraných kopúl.

Definícia 3.2: *Nech (X, Y) je vektor spojitých náhodných veličín s marginálnymi distribučnými funkciami F a G . Potom koeficient hornej chvostovej závislosti $\lambda_U \in [0, 1]$ a koeficient dolnej chvostovej závislosti $\lambda_L \in [0, 1]$ definujeme ako*

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} P(Y > G^{-1}(u) | X > F^{-1}(u)),$$

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} P(Y \leq G^{-1}(u) | X \leq F^{-1}(u))$$

za predpokladu, že limity existujú. Ak $\lambda_U \in (0, 1]$, resp. $\lambda_L \in (0, 1]$, hovoríme, že X a Y sú asymptoticky závislé na hornom, resp. dolnom chvoste. Ak $\lambda_U = 0$, resp. $\lambda_L = 0$, hovoríme, že X a Y sú asymptoticky nezávislé na hornom, resp. dolnom chvoste.

3.2 Definícia kopúl a ich vlastnosti

So zadanými mierami závislosti, ktoré patria medzi charakteristiky kopúl vyzdvihujúce ich význam, uvedieme v nasledujúcom texte definíciu kopúl a ich základné vlastnosti.

Definícia 3.3: (kopula) *n -dimenzionálna kopula je distribučná funkcia na $[0, 1]^n$ s marginálnymi distribučnými funkciami majúcimi rovnomerné rozdelenie na intervale $[0, 1]$. Označujeme ju $C(\mathbf{u}) = C(u_1, \dots, u_n)$. Kopula je teda zobrazením z n -dimenzionálnej kocky do jednotkového intervalu $[0, 1]$, $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ s nasledujúcimi vlastnosťami:*

- (i) $C(u_1, \dots, u_n)$ je rastúca v každej zložke u_i ;
- (ii) $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ pre $\forall i \in \{1, \dots, n\}, u_i \in [0, 1]$;
- (iii) Pre všetky $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in [0, 1]^n$, kde $a_1 \leq b_1$ máme

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_n} C(u_{1i_1}, \dots, u_{ni_n}) \geq 0, \quad (3.1)$$

kde $u_{j1} = a_j$ a $u_{j2} = b_j$ pre $\forall j \in \{1, \dots, n\}$.

Tri uvedené vlastnosti sú základnou charakteristikou kopula funkcií. Navyše, ak $2 \leq k < d$, potom k -dimenzionálne marginálne funkcie n -dimenzionálnej kopuly sú tiež kopulami.

Pojem kopula, čo v preklade z latinčiny znamená puto alebo zväzok, poprvýkrát výstižne použil Abe Sklar vo svojom tvrdení, ktoré sa stalo základom teórie kopúl a ich mnohých aplikácií v štatistike. Pred jeho vyslovením zavedieme značenie definičného oboru - $\text{Dom}(F)$ a oboru hodnôt funkcie F - $\text{Ran}(F)$.

Tvrdenie 3.1: (Sklarova veta) *Nech H je združená distribučná funkcia s marginálnymi distribučnými funkciami F_1, \dots, F_n . Potom existuje kopula C taká, že pre $\forall x_1, \dots, x_n \in [-\infty, +\infty]$ platí*

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)). \quad (3.2)$$

Ak sú F_1, \dots, F_n spojité, potom je C určená jednoznačne. Inak je C jednoznačne určená na n -rozmernom intervale $\text{Ran}(F_1) \times \text{Ran}(F_2) \times \dots \times \text{Ran}(F_n)$.

Naopak, ak C je kopula a F_1, \dots, F_n sú jednorozmerné distribučné funkcie, potom H definovaná vzťahom (3.2) je združená distribučná funkcia s marginálnymi distribučnými funkciami F_1, \dots, F_n .

Tvrdenie aj s dôkazom možno nájsť v publikácii [5].

Marginálne distribučné funkcie F_1, \dots, F_n združenej funkcie H z vety 3.1 sú tiež distribučné funkcie definované $F_i(x_i) = H(+\infty, \dots, +\infty, x_i, +\infty, \dots, +\infty)$ pre

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Zo Sklarovej vety môžeme za istých predpokladov, vid' diplomová práca [7], odvodiť nasledujúce:

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)),$$

čo ukazuje, že kopuly zobrazujú závislosť v kvantilovom merítku, pretože ide o združenú pravdepodobnosť, kedy je L_1 menšie ako u_1 -kvantil distribučnej funkcie F_1 a analogicky pre všetky L_i , kde $2 \leq i \leq n$.

V prípade kopúl nie je pravidlom, že existuje ich združená hustota. Na to, aby tomu tak bolo, musí existovať n -tá derivácia kopuly C . Potom pre hustotu c píšeme

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n}.$$

Pre združenú distribučnú funkciu H s marginálnymi distribučnými funkciami F_1, \dots, F_n za platnosti vyššie uvedeného a diferencovateľnosti F_1, \dots, F_n platí

$$h(u_1, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n f_i(u_i) \cdot c(F_1(u_1), \dots, F_n(u_n)).$$

Veľkou výhodou kopula funkcií je ich správanie sa pri rýdzo monotónnych transformáciách náhodných veličín. V prípade rýdzo rastúcich transformácií sa ich predpis nemení a pri rýdzo klesajúcich transformáciách je ich zmena predpovedateľná, o čom vypovedajú aj nasledujúce tvrdenia.

Tvrdenie 3.2: *Nech (L_1, \dots, L_n) je náhodný vektor so spojitými marginálnymi náhodnými veličinami a kopulou C_{L_1, \dots, L_n} a nech T_1, \dots, T_n sú rýdzo rastúce funkcie. Potom náhodný vektor $(T_1(L_1), \dots, T_n(L_n))$ má tiež kopulu C_{L_1, \dots, L_n} .*

Dôkaz vyššie uvedeného tvrdenia možno nájsť v knihe [5]. Ďalej uvedieme tvrdenie z publikácie [6] pre dvojrozmerné kopula funkcie.

Tvrdenie 3.3: *Nech L_1 a L_2 sú spojitú náhodné veličiny s kopulou C_{L_1, L_2} . Nech α a β sú rýdzo monotónne na $\text{Ran}(L_1)$ a $\text{Ran}(L_2)$.*

(i) Ak je α rýdzo rastúca a β rýdzo klesajúca, potom

$$C_{\alpha(L_1), \beta(L_2)}(u, v) = u - C_{L_1, L_2}(u, 1 - v).$$

(ii) Ak je α rýdzo klesajúca a β rýdzo rastúca, potom

$$C_{\alpha(L_1), \beta(L_2)}(u, v) = v - C_{L_1, L_2}(1 - u, v).$$

(iii) Ak sú α a β obe rýdzo klesajúce, potom

$$C_{\alpha(L_1), \beta(L_2)}(u, v) = u + v - 1 + C_{L_1, L_2}(1 - u, 1 - v).$$

3.3 Triedy kopúl

Pre prácu s kopula funkciami a ich lepšiu aplikáciu na vybrané dáta ich rozdelíme do dvoch základných tried a opíšeme ich vlastnosti. Najprv si však predstavíme funkciu definovanú pre nezávislé náhodné veličiny - súčinovú kopulu. Jej definícií bude predchádzať definícia nezávislých náhodných veličín.

Definícia 3.4: Náhodné veličiny L_1, \dots, L_n sú nezávislé práve vtedy, keď súčin ich distribučných funkcií F_1, \dots, F_n je rovný ich združenej distribučnej funkcii H ,

$$H(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdot \dots \cdot F_n(x_n),$$

pre všetky $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Z vlastnosti nezávislých náhodných veličín dostávame predpis jednej zo základných kopúl, súčinovej kopuly $C = \Pi$,

$$\Pi(u_1, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n u_i.$$

Z použitia Sklarovej vety a definície súčinovej kopuly vyplýva nasledujúca veta.

Tvrdenie 3.4: Nech L_1, \dots, L_n sú náhodné veličiny so spojitými distribučnými funkciami F_1, \dots, F_n a združenou distribučnou funkciou H . Potom L_1, \dots, L_n sú nezávislé práve vtedy, keď $C_{L_1 \dots L_n} = \Pi$.

Jednou z dôležitých charakteristík kopúl je aj skutočnosť, že každú z nich možno ohraničiť tzv. Fréchet-Höfdingovou dolnou a hornou hranicou určujúcou štruktúru závislosti jednotlivých marginálnych náhodných veličín, ktorých združené rozdelenie je určené kopulou. Dôkaz nasledujúceho tvrdenia je uvedený v literatúre [5].

Tvrdenie 3.5: (Fréchet-Höfdingove hranice) Nech sú funkcie M a W definované nasledovne:

- $M(u_1, \dots, u_n) = \min\{u_1, \dots, u_n\}$
- $W(u_1, \dots, u_n) = \max\left\{\sum_{i=1}^n u_i + 1 - n, 0\right\}$

Potom pre každú kopulu $C(u_1, \dots, u_n)$ platí nerovnosť

$$W(u_1, \dots, u_n) \leq C(u_1, \dots, u_n) \leq M(u_1, \dots, u_n).$$

Kopulu $M(u_1, \dots, u_n)$ nazývame *Fréchet-Höfdingova horná hranica* a funkciu $W(u_1, \dots, u_n)$ *Fréchet-Höfdingova dolná hranica*. M je kopula funkcia tvorená úplne pozitívne závislými náhodnými veličinami. Teda náhodné veličiny L_1, \dots, L_n

sú skoro isto navzájom svojimi rýdzo rastúcimi funkciami práve vtedy, keď ich kopula je tvorená funkciou M . Funkcia W je kopulou iba pre dimenzie menšie ako 3, čo je aj s konkrétnym príkladom dokázané v knihe [5]. W je funkciou úplne negatívne závislých náhodných veličín, čo znamená, že veličiny sú si s takmer jednotkovou pravdepodobnosťou navzájom rýdzo klesajúce funkcie.

Prípad, kedy sú náhodné veličiny nezávislé, sme popísali vyššie definíciou súčinovej kopuly.

So zadanými základnými kopulami sa môžeme bližšie venovať ich rozdeleniu na eliptické a archimedovské triedy. Po výklade bude nasledovať implementácia vybraných kopúl do výpočtu rizikovej miery VaR a jej modifikácie CVaR.

3.3.1 Eliptická trieda

Do eliptickej triedy radíme kopuly tvorené eliptickými rozdeleniami náhodných veličín, medzi ktoré patria viacrozmerné normálne a viacrozmerné Studentovo t rozdelenie. V tomto prípade môžeme napísať vzťah medzi Kendallovým τ a korelačným koeficientom ρ ako $\rho = \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)$, ako je uvedené v článku [2]. Nižšie uvádzame definíciu eliptického rozdelenia.

Definícia 3.5: *Nech \mathbf{X} je n -rozmerný náhodný vektor. Ak pre $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ a pre pozitívne semidefinitnú symetrickú maticu Σ o rozmeroch $n \times n$ je charakteristická funkcia $\varphi_{\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{t})$ funkciou kvadratickej formy $\mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t}$, tzn.: $\varphi_{\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{t}) = \Phi(\mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t})$, potom hovoríme, že \mathbf{X} má eliptické rozdelenie s parametrami $\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \Phi$.*

Definícia 3.6: *Náhodný vektor \mathbf{X} (alebo jeho distribučná funkcia) je radiálne symetrický okolo \mathbf{a} , ak platí, že združené distribučné funkcie náhodných vektorov $\mathbf{X} - \mathbf{a}$ a $\mathbf{a} - \mathbf{X}$ sa rovnajú.*

Ako je uvedené v literatúre [5], eliptický náhodný vektor \mathbf{X} s viacrozmerným eliptickým rozdelením s parametrami $\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \Phi$ spĺňa vyššie zadanú vlastnosť, a teda určuje jednu zo základných charakteristík eliptických kopúl, ktorou je symetria.

Medzi základné kopuly z uvažovanej triedy, ktorými sa v nasledujúcom texte zaoberáme, patria Gaussova a Studentova kopula, ktoré boli odvodené od vyššie spomenutých viacrozmerných rozdelení.

Gaussova kopula

Ako bolo spomenuté vyššie, Gaussova kopula je obdobou viacrozmerného normálneho rozdelenia. Podobnosť medzi týmito dvoma viacrozmernými rozdeleniami je v aplikácii Gaussovej kopuly na marginálne distribučné funkcie s normálnym

rozdelením $N(\mu, \sigma^2)$, kedy dostávame viacrozmerné normálne rozdelenie.

Vyjadrenie n -rozmernej Gaussovej kopuly pomocou Sklarovej vety je teda nasledovné:

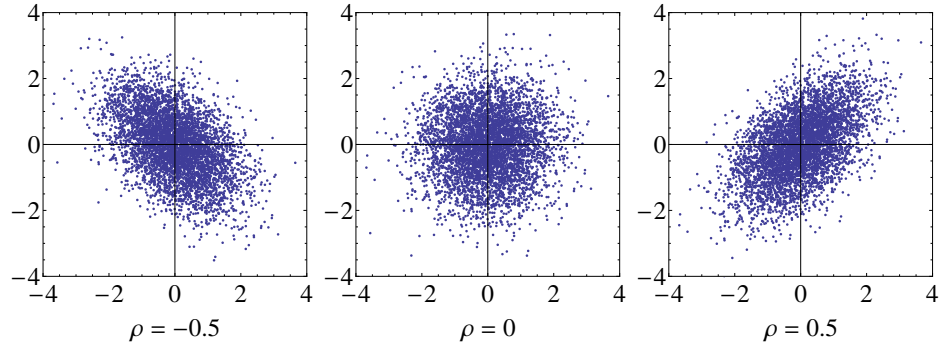
$$C_P^{Gauss}(u_1, \dots, u_n) = \Phi_P(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)),$$

kde Φ je distribučná funkcia jednorozmerného normálneho rozdelenia a P je korelačná matica marginálnych náhodných veličín.

Pomocou integrálov a predpisu viacrozmerného normálneho rozdelenia so závislosťou marginálnych rozdelení definovanou korelačnou maticou P vyjadríme distribučnú funkciu pre viacrozmernú Gaussovú kopulu ako:

$$C_\rho^{Gauss}(u_1, \dots, u_n) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_n)} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |P|}} \exp \left\{ -\frac{\mathbf{x}^T P^{-1} \mathbf{x}}{2} \right\} d\mathbf{x}.$$

V prípade Gaussovej kopuly sa koeficienty dolnej a hornej chvostovej závislosti, λ_L a λ_U , rovnajú, čo je spôsobené jej symetrickosťou. V limite sú ich hodnoty nulové, teda uvažované marginálne náhodné veličiny sú asymptoticky nezávislé na dolnom, resp. hornom chvoste. Táto skutočnosť je pri pohľade na obrázok 3.1, kde sú zobrazené simulácie z Gaussovej kopuly aplikovanej na normálne rozdelenie s parametrami $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$ o veľkosti 5 000 záznamov, zrejmá. Pre porovnanie sme do obrázka zakreslili kopulu pre rôzne hodnoty korelačného koeficientu ρ medzi marginálnymi náhodnými veličinami.



Obr. 3.1: Simulácie Gaussovej kopuly pre rôzne hodnoty korelačného koeficientu ρ

Studentova kopula

Studentova kopula bola, ako sme už vyššie spomínali, odvodená od viacrozmerného Studentovho t rozdelenia, ktoré je výsledkom aplikácie kopuly ako združenej distribučnej funkcie na náhodné veličiny s normálnym rozdelením. Vzorec, vychádzajúci zo Sklarovej vety, pre n -rozmerný prípad, kde t označuje jednorozmerné Studentovo t rozdelenie, ν počet stupňov voľnosti a P je korelačnou maticou uvažovaných marginálnych jednorozmerných náhodných veličín, je uvedený nižšie:

$$C_{\nu, P}^t(u_1, \dots, u_n) = t_{\nu, P}(t_\nu^{-1}(u_1), \dots, t_\nu^{-1}(u_n)).$$

Rovnako ako v prípade Gaussovej kopuly, aj tu môžeme zapísať kopulu C pomocou integrálov. Teda píšeme:

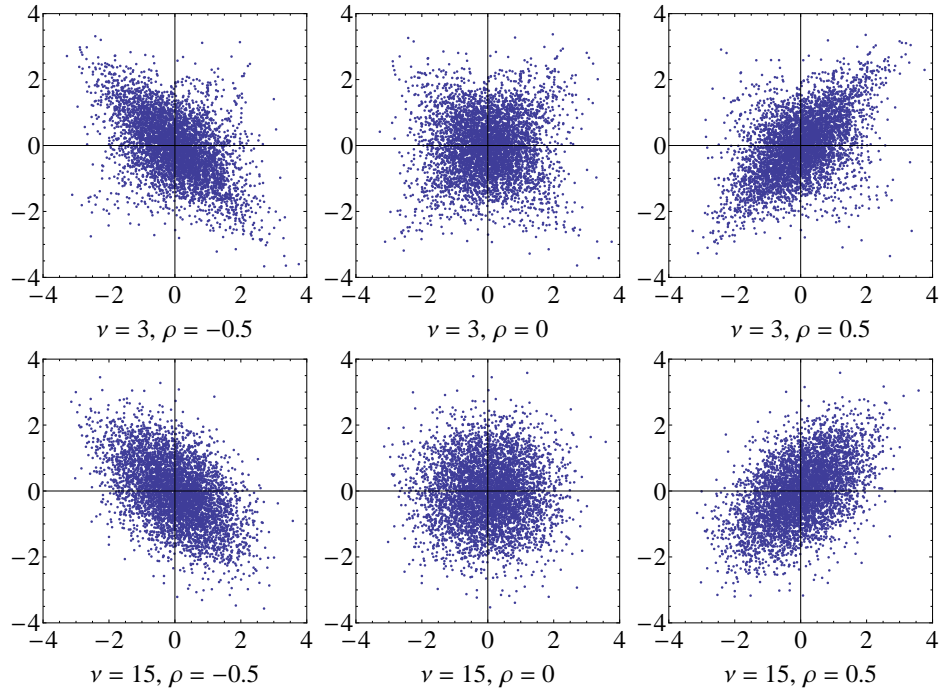
$$C_{\nu, P}^t(u_1, \dots, u_n) = \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_n)} \frac{\Gamma(\frac{\nu+n}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{(\pi\nu)^n|P|}} \cdot \left(1 + \frac{\mathbf{x}^T P^{-1} \mathbf{x}}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+n}{2}} d\mathbf{x}.$$

Výhoda použitia Studentovej kopuly spočíva v tom, že pomocou nej môžeme vyjadriť špicatosť dát, a teda lepšie aproximovať reálnu situáciu napríklad na finančných trhoch, ktoré sú v našej práci uvažované. S rastúcim počtom stupňov voľnosti však, ako je to v jednorozmernom prípade, Studentova kopula konverguje ku Gaussovej a túto vlastnosť stráca. Takisto sa vytráca aj chvostová závislosť, ktorej koeficienty sa vďaka symetrii eliptických rozdelení opäť rovnajú.

$$\lambda_U = \lambda_L = 2t_{\nu+1} \left(-\frac{\sqrt{\nu+1}\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}} \right),$$

kde ρ je mimodiagonálny prvok korelačnej matice P . Dôkaz rovnosti možno nájsť v článku [2].

Pre prípady, kedy má dvojrozmerná Studentova kopula počet stupňov voľnosti 3 a 15 a je aplikovaná na normalizované normálne rozdelenie, sme vytvorili 5 000 simulácií a zakreslili ich do obrázka 3.2, na ktorom môžeme pozorovať istú chvostovú závislosť. Opäť sme pre porovnanie použili rôzne koeficienty korelácie a vidíme, že s pätnástimi stupňami voľnosti sa v tomto počte nasimulovaných dát ich hustota takmer nelíši od hustoty v prípade Gaussovej kopuly na obrázku 3.1.



Obr. 3.2: Simulácie Studentovej kopuly pre rôzne stupne voľnosti ν a hodnoty korelačného koeficientu ρ

3.3.2 Archimedovská trieda

Druhou skupinou kopúl, ktorá je v práci predstavená, je archimedovská trieda. Jej veľkou výhodou oproti eliptickým kopula funkciám je, že kopuly do nej spadajúce nie sú symetrické. Lepšie tak aproximujú možné nesymetrie vo vzájomnej závislosti jednotlivých marginálnych náhodných veličín, a tým, v nami uvažovanom prípade, lepšie odhadujú celkové trhové riziko pre investora obchodujúceho na finančných trhoch. Vo všeobecnosti sa archimedovské kopuly vďaka svojim vlastnostiam často používajú pri modelovaní úrokového rizika, ktorému je vystavené portfólio aktív.

Pred vetou určujúcou dvojrozmerné archimedovské kopuly zavedieme pojem pseudo-inverznej funkcie.

Definícia 3.7: (pseudo-inverzná funkcia) *Predpokladajme, že $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ je spojitá a rýdzo klesajúca a platí, že $\phi(1) = 0$ a $\phi(0) \leq \infty$. Potom pseudo-inverznú funkciu k ϕ na definičnom obore $[0, \infty]$ definujeme ako*

$$\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \phi(0), \\ 0, & \phi(0) < t \leq \infty. \end{cases} \quad (3.3)$$

Tvrdenie 3.6: (dvojrozmerná archimedovská kopula) *Nech $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ je spojitá a rýdzo klesajúca, $\phi(1) = 0$ a nech $\phi^{[-1]}(t)$ je ako v (3.3). Potom*

$$C(u_1, u_2) = \phi^{[-1]}(\phi(u_1) + \phi(u_2)) \quad (3.4)$$

je kopula práve vtedy, keď ϕ je konvexná.

Definícia 3.8: (generátor archimedovskej kopuly) *Spojitú, rýdzo klesajúcu, konvexnú funkciu $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ spĺňajúcu $\phi(1) = 0$ nazývame generátorom archimedovskej kopuly. Hovoríme, že ϕ je rýdzi generátor ak $\phi(0) = \infty$.*

V prípade rýdneho generátora môžeme vo vzťahu (3.4) nahradiť pseudo-inverznú funkciu funkciou inverznou. Aby sme vo viacrozmerných archimedovských kopulách mohli písať

$$C(u_1, \dots, u_n) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_n)), \quad (3.5)$$

musí byť generátor nielen rýdzi, ale jeho inverzná funkcia $\phi^{-1} : [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$ musí spĺňať vlastnosť kompletnej monotónnosti. Hovoríme, že klesajúca funkcia $f(t)$ je kompletne monotónna na intervale $[a, b]$, ak platí nasledovné:

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} f(t) \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \in (a, b).$$

Vyššie uvedené vlastnosti sú popísané v knihe [5].

V nasledujúcom texte spomenieme dvoch zástupcov archimedovskej triedy, pomocou ktorých ilustrujeme nesymetrické vlastnosti, kedy sú dáta asymptoticky závislé len na dolnom, resp. hornom chvoste. Ide o Claytonovu a Gumbelovu-Hougaardovu kopulu. Generátory oboch uvedených kopúl, ako je uvedené v literatúre [5], majú kompletne monotónne inverzné funkcie na $[0, \infty]$.

Claytonova kopula

Ako bolo vyššie popísané, archimedovské kopuly sú nesymetrické, a teda ich koeficienty chvostovej závislosti sa nerovnajú. V prípade Claytonovej kopuly sú marginálne rozdelenia asymptoticky nezávislé na hornom chvoste ($\lambda_U = 0$), no v prípade dolného chvosta definujeme závislosť vzťahom uvedeným v knihe [5]:

$$\lambda_L = \begin{cases} 2^{-\frac{1}{\theta}}, & \theta > 0, \\ 0, & \theta \leq 0, \end{cases}$$

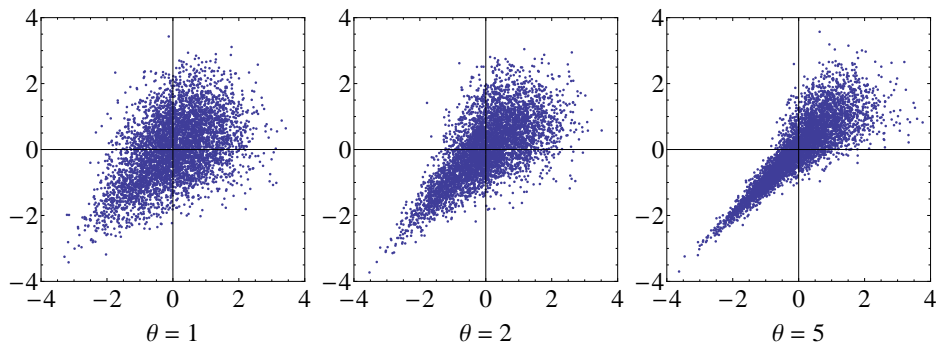
kde θ je parameter Claytonovej kopuly danej predpisom

$$C_{\theta}^{Cl}(u_1, \dots, u_n) = \left(\sum_{i=1}^n u_i^{-\theta} - 1 \right)^{-\frac{1}{\theta}}, \quad \theta > 0.$$

V dvojrozmernom prípade môže parameter θ nadobúdať aj hodnoty z $[-1, 0)$, no ako bolo vyššie spomenuté, vo viacrozmerných Claytonových kopulách na tomto intervale nie je inverzná funkcia generátora kompletne monotónna, a teda sa kopula nedá vyjadriť pomocou vzťahu (3.5).

Parameter θ priblížime pomocou spojitosti medzi ním a Kendallovým τ , ktorá je daná vzťahom $\tau = \frac{\theta}{\theta+2}$. Samotný generátor má pre uvedenú kopulu predpis $\phi(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$.

Pre ilustráciu dolnej chvostovej závislosti sme nasimulovali dáta o veľkosti 5 000 scenárov a následne sme ich zakreslili do obrázka 3.3. Použili sme viac hodnôt θ , aby sme ukázali aký má jeho hodnota vplyv na rozloženie dát a vidíme, že s rastúcim θ sa zväčšuje aj dolná chvostová závislosť, čo je z jej predpisu pre Claytonovu kopulu zřejmé.



Obr. 3.3: Simulácie Claytonovej kopuly pre rôzne hodnoty parametra θ

Uvedená vzájomná asymptotická závislosť dát by v praxi pre nami uvažované distribučné funkcie rozdelenia strát L_1 a L_2 znamenala, že ak sú výnosy jednej z akcií patriacej do portfólia extrémne, pravdepodobne budú extrémne aj výnosy druhej z jeho zložiek.

Gumbelova-Hougaardova kopula

Opačne je to v prípade druhej uvažovanej archimedovskej kopuly, kedy majú portfóliové zložky tendenciu zaznamenávať extrémne straty a v nepriaznivých trhových podmienkach by tak znamenali pre investora pomerne vysoké riziko. Je to spôsobené tým, že Gumbelova-Hougaardova kopula interpretuje závislosť marginálnych náhodných veličín práve hornou chvostovou závislosťou, teda platí:

$$\lambda_L = 0, \quad \lambda_U = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}},$$

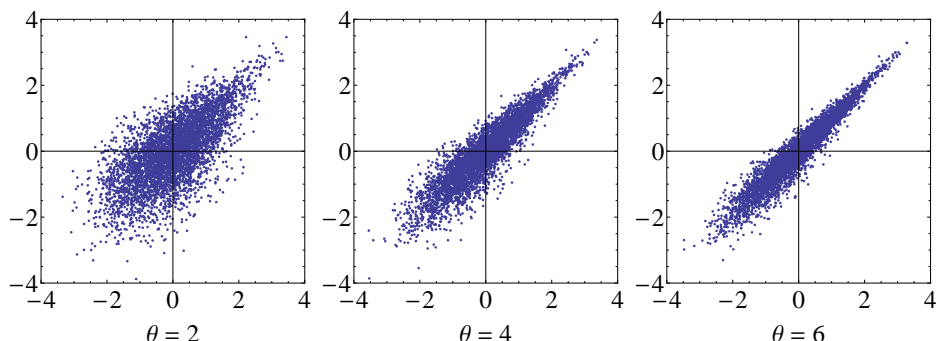
kde θ je parametrom kopuly spĺňajúcim $\theta \geq 1$. O generátore danom predpisom $\phi(t) = (-\ln t)^\theta$ môžeme pre dané hodnoty θ hovoriť, že je rýdži.

Pomocou zmieneného generátora Gumbelovej-Hougaardovej kopuly teda vyjadríme jej vzorec.

$$C^{GH}(u_1, \dots, u_n) = \exp \left\{ - \left(\sum_{i=1}^n \ln^\theta \left(\frac{1}{u_i} \right) \right)^{\frac{1}{\theta}} \right\},$$

kde θ je determinovaná pomocou Kendallovho τ rovnosťou $\tau = 1 - \frac{1}{\theta}$.

Pre porovnanie jednotlivých kopula funkcií navzájom, uvádzame aj v tomto prípade grafy nasimulovaných dát s rôznymi hodnotami parametra θ . Nasimulované dáta o veľkosti 5 000 dvojíc sme zakreslili do obrázka 3.4.



Obr. 3.4: Simulácie Gumbelovej-Hougaardovej kopuly pre rôzne hodnoty parametra θ

Z predpisu koeficientu hornej chvostovej závislosti λ_U , rovnako ako z priložených grafických zobrazení, je zrejmé, že λ_U je rastúcou funkciou parametra θ .

3.4 Aplikácia kopúl na reálne dáta

V nasledujúcej podkapitole sa venujeme aplikácii vyššie spomenutých druhov kopúl na v predošlých príkladoch používané dáta - akcie spoločností BMW, Johnson&Johnson a AT&T. Využijeme základnú vlastnosť kopúl, ktorou je možná

kombinácia distribučných funkcií marginálnych náhodných veličín a na jednotlivé uvažované rizikové faktory (straty plynúce z investícií do vybraných aktív) použijeme rozdelenia, ktoré podľa hodnôt logaritmickkej vierohodnostnej funkcie l z tabuľky 2.15 najlepšie aproximujú ich vývoj. V prípade podnikov BMW a AT&T ide o Studentovo t rozdelenie a pre Johnson&Johnson vyberieme rozdelenie Laplaceovo.

Parametre sa líšia od parametrov použitých v jednorozmerných rozdeleniach, pretože sme, kvôli rozdielom v biznisových dňoch spomínaných vyššie, dáta mierne skrátili. Nižšie uvádzame rozdelenia aproximujúce dáta jednotlivých podnikov.

- $L_{BMW} \sim t(-0,00109986; 0,0181463; 5,88388)$,
- $L_{J\&J} \sim Laplace(-0,000181967; 0,00649499)$,
- $L_{AT\&T} \sim t(-0,001012; 0,00842706; 6,22966)$.

Pomocou funkcie *EstimatedDistribution* odhadneme parametre vo vybraných kopulách. V Gaussovej a Studentovej kopule využívame kovariančnú maticu Σ z výpočtu variančno-kovariančnej metódy. V prípade Studentovej kopuly je však neznámy počet stupňov voľnosti, ktorý vypočítame za pomoci spomenutej funkcie, a teda jeho hodnota je $\nu = 0,206894$. V prípade Claytonovej a Gumbelovej-Hougaardovej funkcie odhadneme parameter θ , ktorý nadobúda v prípade prvej z kopúl hodnotu $\theta^{Cl} = 1,59868$ a v druhej z archimedovských kopúl má hodnotu $\theta^{GH} = 1,43592$.

Z uvedených kopúl s príslušnými parametrami vyberieme pomocou metódy maximálnej vierohodnosti tú, ktorá najlepšie aproximuje združené rozdelenie strát z uvažovaných akcií a ich vzájomnú závislosť. V tabuľke 3.1 uvádzame hodnoty logaritmickkej vierohodnostnej funkcie l pre jednotlivé kopuly a variančno-kovariančnú metódu. Porovnaním jednotlivých hodnôt vidíme, že variančno-kovariančná metóda je aj napriek nedostatkom, čo sa týka určenia rozdelenia marginálnych náhodných veličín a ich závislosti, lepším postupom odhadu združeného rozdelenia nami používaných reálnych dát ako odhad Studentovou, Gaussovou, či Claytonovou kopulou.

Variančno-kovariančná metóda	Gaussova kopula	Studentova kopula	Claytonova kopula	Gumbelova-Hougaardova kopula
5706,18	$-7,78516 \cdot 10^6$	4337,68	5699,36	5755,48

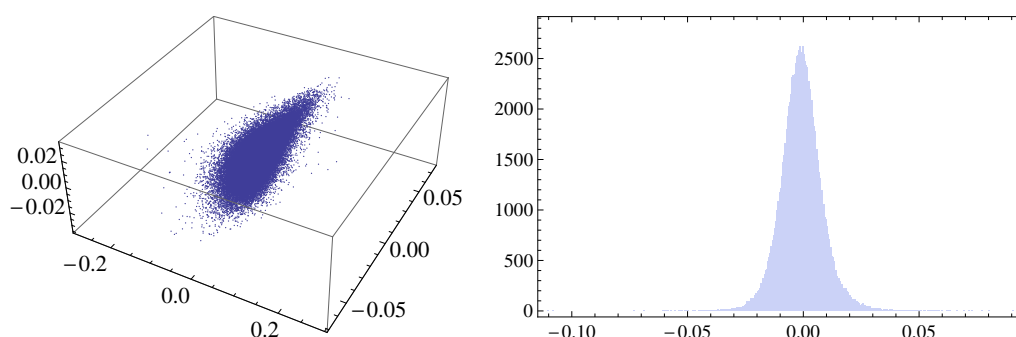
Tabuľka 3.1: Hodnoty logaritmickkej vierohodnostnej funkcie l odhadov pomocou variančno-kovariančnej metódy a kopula funkcií

Z hodnôt v tabuľke 3.1 vidíme, že najvhodnejšie aproximuje rozdelenie nami použitých dát kopula z archimedovskej triedy - Gumbelova-Hougaardova kopula. Ako je spomenuté vyššie, vybraná kopula určuje závislosť marginálnych náhodných veličín hornou chvostovou závislosťou, čo v našom prípade znamená, že ak jedna zo zložiek portfólia podlieha extrémnym stratám, budú im pravdepodobne podliehať aj ostatné zložky. Popísaná situácia je na finančných trhoch

bežným javom, a preto sa horná chvostová závislosť javí ako rozumná forma vyjadrenia vzájomnej závislosti zložiek portfólia.

Na výpočet hodnoty v riziku VaR a jej podmieneného variantu CVaR pre uvažované portfólio akcií použijeme váhy (2.1), ktoré v našom prípade určujú optimálne portfólio pri danom očakávanom výnose $r = 0,0008$.

Podobne ako pri variančno-kovariančnej metóde, aj tu vytvárame simulované dáta o veľkosti 100 000 trojíc a následne ich násobíme váhami určujúcimi podiel investícií do akcií jednotlivých spoločností. Simulované trojice sú spolu s histogramom určujúcim empirickú hustotu možnej výslednej straty z investície do portfólia zakreslené do obrázka 3.5. Z histogramu vidíme, že rozdelenie strát z portfólia má ťažké chvosty, čo čiastočne vysvetľuje špicatosť použitých dát, ktorej hodnota je $\gamma_2 = 5,92593$.



Obr. 3.5: Simulácia strát pomocou Gumbelovej-Hougaardovej kopuly

Prenásobením možných scenárov vývoja strát na finančnom trhu váhami určujúcimi portfólio sme získali jednorozmerné dáta, z ktorých sme následne vypočítali hodnoty VaR_α a CVaR_α na vybraných hladinách spoľahlivosti α . Výsledné hodnoty sú uvedené v tabuľke 3.2.

α	VaR_α	CVaR_α
0,9	0,00990996	0,0159983
0,95	0,0139452	0,0203195
0,99	0,0238913	0,0309609
0,999	0,0394402	0,0495127

Tabuľka 3.2: VaR_α a CVaR_α pre jednotlivé hodnoty α - odhad pomocou Gumbelovej-Hougaardovej kopuly

Záver

Cieľom práce bolo oboznámiť čitateľa s najpoužívanějšími kvantitatívnymi metódami merania trhového rizika, ktorých výpočet vychádza z hodnoty v riziku (VaR) a ich následnou aplikáciou na reálne dáta. Uviedli sme vlastnosti uvažovaných mier a ukázali sme ich ekonomický význam v praxi.

Špeciálne sme sa zaoberali viacrozmernými prípadmi, kedy je nutné do výpočtu zaradiť vzájomnú závislosť jednotlivých rizikových faktorov ovplyvňujúcich konečnú hodnotu VaR a jej príslušných rozšírení. Uvažovali sme rôzne vyjadrenia miery závislosti a na ich základe sme použili novší prístup merania trhového rizika - kopula funkcie. Vybrané postupy výpočtu hodnôt v riziku sme aplikovali na reálne dáta a výsledky sme podložili grafickými zobrazeniami.

Následne sme dané metódy porovnávali a priniesli stručný popis ich výhod, prípadne nevýhod, s ktorými sa pri aplikáciách na skutočné dáta v praxi často stretávame.

Postupy výpočtu rizikových mier použité v práci sú základom uvádzajúcim čitateľa do problematiky rizikových mier, ktorý možno ďalej rozširovať a získať tak hlbšiu predstavu o využití a konkrétnej aplikácii kvantitatívnych metód vo výpočtoch odhadujúcich trhové riziko. Samotné využitie kopula funkcií vo finančnom sektore je na začiatku svojho vývoja, a preto ho v spojení s premietnutím výpočtov do praxe nemôžeme považovať za ukončený. Tým v teórii kvantitatívnych metód naďalej nechávame priestor pre ich budúce štúdium.

Literatúra

- [1] Adam A., Houkari M., Laurent J. P. (2008): Spectral Risk Measures and Portfolio Selection. *Journal of Banking & Finance* **32**, 1870-1882.
- [2] Demarta S., McNeil, A. J. (2005): The t Copula and Related Copulas. *International Statistical Review* **73**, č. 1, 111-129 .
- [3] Härdle W., Kleinow T., Stahl G. (2002): *Applied Quantitative Finance*. Springer - Verlag Berlin Heidelberg.
- [4] Hurt J. (2010): *Risk Measures In Finance Revisited*. Wolfram Technology Conference 2010. Champaign (IT).
<http://www.wolfram.com/events/techconf2010/presentations/JanHurt.zip>.
- [5] McNeil, A. J., Frey, R., Embrechts, P. (2005): *Quantitative Risk Management: concepts, techniques and tools*. Princeton University Press.
- [6] Nelsen, R. B. (2006): *An Introduction to Copulas*. Springer Science + Business Media, Inc..
- [7] Potisková L. (2009): *Odhad Value-at-Risk pomocou copula funkcií*, diplomová práca MFF UK Bratislava.